Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Blatt 9

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Ising Modell, kanonisches Ensemble

Betrachten Sie ein Kette von N Spins (magnetischen Momenten), wobei die einzelnen Spins jeweils mit ihrem nächten Nachbarn wechselwirken.

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1}, \quad s_i = \pm 1,$$

J ist eine Kopplungskonstante.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme. Gehen Sie hierbei rekursiv vor. Das Ergebnis ist

$$Z = 2(2\cosh \beta J)^{N-1} \ .$$

b) Zeigen Sie $\langle s_j \rangle = 0$ für alle j's.
Hinweis. Zeigen Sie zu erst, dass $\langle f(s_1) \rangle = \langle f(s_N) \rangle = 0$ für ungerade Funktionen f.

c) Berechnen Sie den Korrelator $\langle s_i s_j \rangle$, wobei $i < j$.
Ergebnis:

$$\langle s_i s_j \rangle = (\tanh \beta J)^{|j-i|} \ .$$

Dies kann man umschreiben als

$$\langle s_i s_j \rangle = e^{-|j-i|/\xi} \ ,$$

wobei

$$\xi = -[\log \tanh \beta J]^{-1} > 0$$

Korrelationslänge heisst. ξ divergiert hier im Limes $T \to 0$, was wichtig im Zusammenhang mit Phasenübergängen ist.

Aufgabe 2: Dipole

Betrachten Sie ein Gas von N nichtwechselwirkenden, stabartigen Molekülen, wobei jedes Molekül die Masse m, Trägheitsmoment I und ein elektrisches Dipolmoment μ habe. Ein Molekül ist durch fünf verallgemeinerte Koordinaten beschrieben: die Position des Schwerpunktes $\vec{r}$ und zwei Winkelkoordinaten θ, ϕ. Aus der klassischen Mechanik kennen Sie bereits die Lagrangefunktion, die solch ein Molekül in einem äußeren elektrischen Feld $\mathcal{E}$ entlang der z-Achse beschreibt:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{I}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + \mu\mathcal{E}\cos\theta.$$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Hamiltonfunktion ausgedrückt durch die verallgemeinerten Impulse $\vec{p}$, p_θ und p_ϕ.

b) Berechnen Sie die kanonische Zustandsfunktion von N nichtwechselwirkenden Dipolen

$$Z(T,V,N) = \frac{1}{N!(2\pi\hbar)^{5N}} \int \left[\prod_{i=1}^{N} d^3\vec{r}_i d\theta_i d\phi_i d^3\vec{p}_i dp_{\theta,i} dp_{\phi,i} \right] \exp(-\beta H).$$

c) Berechnen Sie den Druck und die innere Energie.

d) Berechnen Sie die mittlere Polarisierung $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{N} \langle \mu \cos\theta_i \rangle$ und diskutieren Sie den Limes für kleine und große elektrische Felder. Zeichnen Sie P als Funktion der Temperatur.

→ Bitte wenden!

Aufgabe 3: Äquipartitionstheorem

a) Wiederholen Sie nochmals die Aussage des Äquipartitionstheorems. Welche Annahme wurde bei der Herleitung verwendet?

b) Wenden Sie das Äquipartitionstheorem an um den Erwartungswert der Energie $\langle H \rangle$ für die folgenden Systeme zu bestimmen:

(i) N rotierende Moleküle (Trägheitsmomente I) im $\mathbb{R}^3$ mit Hamilton Funktion

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \frac{\dot{\phi}_i^2}{2I}$$

(ii) Ein ultrarelativistisches Gas im $\mathbb{R}^3$ bestehend aus N Teilchen mit Hamilton Funktion

$$H = \sum_{i=1}^{N} c|\vec{p}_i|$$

(iii) Ein allgemeines N Teilchen System im $\mathbb{R}^d$ mit Hamilton Funktion

$$H = \sum_{i=1}^{N} \kappa|\vec{p}_i|^m + \lambda|\vec{x}_i|^n, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

wobei κ und λ dimensionsbehaftete Konstanten darstellen.

Bei Fragen E-Mail an *tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de*