Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Blatt 8

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Polymere

Wir betrachten eine lineare Kette aus N Molekülen, von denen sich jedes in einem von drei Zuständen α, β oder γ befinden kann. Die Längen der Moleküle in den 3 Zuständen seien a, b, c mit $a : b : c = 1 : 2 : 3$, die Energie des Zustandes β sei um Δ niedriger als die der Zustände α und γ, (für die Energie von β können sie $E_\beta = 0$ annehmen). Das System sei abgeschlossen.

a) Finden Sie zunächst die Entropie $S(E, L, N)$ als Funktion der Energie E und der Länge L des Polymers.

b) Berechnen Sie nun die Spannung J des Polymers. Diese Rechnung ist analog zur Berechnung des Drucks aus der Entropie für den Fall 3 dimensionaler Systeme. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslänge L_0 des Fadens, also die Länge, bei der die Spannung verschwindet und zeigen Sie, das diese temperaturunabhängig ist.
Hinweis. Berechnen Sie $\frac{J}{T}$.

c) Zeigen Sie, dass im Grenzfall $\Delta << kT$ und $bJ << kT$ das Hooke'sche Gesetz erfüllt ist: $L - L_0 = \gamma(T)J$ und berechnen Sie die "Federkonstante" γ. Wird das Polymer mit zunehmender Temperatur "weicher" oder "härter"?
Hinweis. Berechnen Sie $\frac{1}{T}$, lösen Sie diese Gleichung und die Gleichung für $\frac{J}{T}$ nach $L - L_0$ um $\frac{E}{\Delta}$ zu bestimmen. Entwickeln Sie $L - L_0$ in βJa und $\beta\Delta$[1].

Aufgabe 2: Zeitentwicklung der Entropie und Liouville Gleichung

Betrachten Sie eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\{p_i, q_i\}, t)$ im Phasenraum. Hierzu gehört die Entropie

$$S(t) = -\int d\Gamma \rho \ln \rho,$$

wobei $d\Gamma$ ein Volumenelement im Phasenraum ist.

a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{dS}{dt} = 0 \ .$$

Verwenden Sie hierzu, dass ρ die Liouville Gleichung erfüllt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\}_{\text{P.B.}} = 0.$$

b) Bestimmmen Sie die Funktion ρ_{max}, die die Entropie $S[\rho]$ unter der Nebenbedingung $\langle H \rangle = E$ (zusätzlich zur Normierungsbedingung) maximiert, wobei H der Hamiltonian ist. Verwenden Sie hierzu Lagrange Multiplikatoren.

c) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial \rho_{max}}{\partial t} = 0$. Verwenden Sie hierzu wieder die Liouville Gleichung.

→ Bitte wenden!

[1]Hier ist $\beta = \frac{1}{kT}$ nicht mit den Zustand β zu verwirren.

Aufgabe 3: Ultrarelativistisches Gas

Wir wollen die thermodynamischen Eigenschaften eines klassischen ultrarelativistischen Gases berechnen. Ein solches Gas besteht aus masselosen Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Nach der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung gilt:

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = |\vec{p}| c \quad \text{für} \quad m = 0.$$

Das ultrarelativistische Gas wird auch oft als leicht zu berechnendes Modell für Teilchen mit Masse $m \neq 0$ benutzt, wenn die Näherung $|\vec{p}| \gg mc$ erfüllt ist. Wir betrachten nun ein solches Gas aus N Teilchen in einem Gebiet vom Volumen V. Für die Hamilton-Funktion gilt also

$$H = \sum_{i=1}^{N} |\vec{p}_i| c.$$

a) Zeigen Sie, dass für die kanonische Zustandssumme für N ununterscheidbare Teilchen der Zusammenhang

$$Z_N = \frac{Z_1^N}{N!}$$

gilt, wobei mit Z_N die N-Teilchen Zustandssumme und mit Z_1 die Einteilchen Zustandssumme bezeichnet wird.

b) Bestimmen Sie die freie Energie als thermodynamisches Potential.

c) Berechnen Sie Druck, Entropie, chemisches Potential, innere Energie und Wärmekapazität C_V.

d) Leiten Sie die Beziehung $U = 3pV$ her, und vergleichen Sie dies mit dem bekannten Ergebnis für das nichtrelativistische Gas.

e) Sei $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ der Gesamtimpuls der Teilchen. Zeigen Sie: Für jede Komponente P_k gilt

$$\langle P_k^2 \rangle = A \cdot N^{\alpha}.$$

Bestimmen Sie insbesondere die Parameter α und A.

Bei Fragen E-Mail an *tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de*