Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Blatt 7

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Fehlstellen im Kristallgitter

Wir betrachten einen Kristall aus N identischen Atomen. Ein *Schottky Defekt* ist einfach ein fehlendes Atom, d.h. eine Leerstelle im Kristallgitter. Durch Sprünge von Atomen können sich diese Defekte "durch den Kristall bewegen" und bilden somit eine Art Gittergas. Δ sei die Energie, die man zur Bildung eines solchen Schottky-Defektes aufwenden muss, d.h. diese Energie ist nötig, um ein Atom aus dem Innern des Kristalls an seine Oberfläche zu bringen und dabei eine Fehlstelle zurückzulassen. Wir nehmen an, dass diese Energie sowohl von der Lage des Atoms innerhalb des Kristalls wie auch von der Zahl der schon vorhandenen Defekte unabhängig ist. Die Anzahl der Defekte sei D.

a) Wie gross sind Energie und Entropie eines Kristalls mit D Defekten? (Nullpunkt: Kristall ohne Defekte)

b) Berechnen Sie die Anzahl der Fehlstellen in Abhängigkeit von der Temperatur. Ergebnis:

$$D(T) = \frac{N}{1 + e^{\frac{\Delta}{kT}}}$$

c) Berechnen Sie nun den Beitrag der Defekte zur Wärmekapazität $c = \frac{\partial U}{\partial T}$

Aufgabe 2: Volumen und Oberfläche der n-Sphäre

In dieser Aufgabe sollen Sie das Volumen V_n und die Einheits-Oberfläche Ω_{n-1} einer n-dimensionalen Kugel bestimmen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals

$$\int \mathrm{d}^n r \ \exp(-\vec{x}^2) \quad (*)$$

in kartesischen Koordinaten, wo $\vec{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

b) Bestimmen Sie nun Ω_{n-1} indem Sie das Integral $(*)$ in n-dimensionale Kugelkoordinaten mit $\mathrm{d}^n r = r^{n-1} \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\Omega_{n-1}$, wo $r^2 = \vec{x}^2$, auswerten. Hierbei können Sie die r-Integration auf eine Gamma Funktion zurückführen.

c) Zeigen Sie, das für das Volumen einer n-dimensionalen Kugel mit Radius R gilt

$$V_n = \frac{R^n}{n} \Omega_{n-1}.$$

d) Überprüfen Sie, ob Ihre Gleichung aus c) die Fläche eines Kreises ($n = 2$) mit Radius R und das Volumen einer Kugel ($n = 3$) mit Radius R korrekt beschreibt.

Aufgabe 3: N harmonische Oszillatoren

Betrachten Sie ein abgschlossenes System von N unterscheidbaren harmonischen Oszillatoren gleicher Frequenz ω, dessen Hamilton Funktion

$$H = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{p_\alpha^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_\alpha^2 \right)$$

lautet. Gehen Sie im folgenden vor, wie in der Vorlesung im Beispiel des idealen Gases.

a) Berechnen Sie die Anzahl Γ von Mikrozustände bis zu einer gegebenen Energie E durch

$$\Gamma = h^{-N} \int_{H(p_\alpha, q_\alpha) \leq E} \mathrm{d}^N p \, \mathrm{d}^N q.$$

Benutzen Sie dazu das Resultat aus der Aufgabe 2.

b) Berechnen Sie die Entropie. Kontrolle:

$$S = kN \left[\ln \frac{E}{\omega \hbar N} + 1 \right] + k \ln \frac{\Delta E}{E},$$

wobei der letzte Term im thermodynamischen Limes entfällt.
Hinweis: Berechnen Sie die Anzahl $\Omega(E)$ von Mikrozustände im Energie-Interval $[E, E+\Delta E]$ als $\Omega(E) = \Gamma(E + \Delta E) - \Gamma(E)$.

c) Zeigen Sie $E = NkT$ und bestimmen Sie den Druck.

Bei Fragen E-Mail an *tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de*