Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Blatt 6

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Momente und Kumulanten

Betrachten Sie die Reihenentwicklung der charakteristischen Funktion einer Zufallsvariablen

$$\Phi_X(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \mu_n$$

sowie die Entwicklung von ln Φ_k in Kumulanten.

$$\ln \Phi_X(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \kappa_n \ .$$

Leiten Sie durch Vergleich der Reihenentwicklungen von $\Phi_X(k)$ in Momente und Kumulanten die folgende Beziehung her:[1]

$$\mu_m = m! \sum_{\substack{\{r_n=0\}_{n>0}, \\ (\sum_{n=1} n \cdot r_n)=m}}^{\infty} \prod_n \frac{1}{(n!)^{r_n} r_n!} \kappa_n^{r_n}.$$

Geben Sie den Zusammenhang zwischen Momenten und Kumulanten fuer die ersten 4 Ordnungen explizit an. Stellen Sie fest: Der numerische Vorfaktor vor $\prod_n \kappa_n^{r_n}$ mit $r_n n = m$ entspricht der Anzahl von Möglichkeiten m Punkte in r_n Untergruppen mit n Elementen aufzuteilen.

Aufgabe 2: Summe von Zufallsvariablen

Gegeben seien die unabhängigen, gleichverteilen Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit den identischen Wahrscheinlichkeitsdichten $\rho_{X_1}(x)$ und $\rho_{X_2}(x)$:

$$\rho_{X_i}(x) = e^{-x} \quad \text{für } x \in [0, \infty], \ i \in \{1, 2\}$$

a) Überlegen Sie sich, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe beider Zufallsvariablen, $Y = X_1 + X_2$, gerade durch den Ausdruck der beiden einzelnen Dichten gegeben ist, d.h. .

$$\rho_{X_1+X_2}(y) = \int_0^y \rho_{X_1}(x) \cdot \rho_{X_2}(y-x) \, \mathrm{d}x$$

b) Berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Summe von 3 und 4 identisch verteilten Zufallsvariablen mit gegebener Dichte und skizzieren Sie die entsprechenden Dichten.

c) Berechnen Sie allgemein die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Summe von n identisch verteile Zufallsvariablen der angegebener Dichte. Skizzieren Sie diese Dichte z.B. für den Spezialfall $n = 100$.
Hinweis: Benutzen Sie Induktion.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für ein allgemeines n.

e) Welche Art von Verteilung erwarten Sie für eine Summe von n Zufallsvariablen, wenn n sehr groß wird (mit Begründung)?

Bei Fragen E-Mail an *tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de*

[1] Mit der Summe ist gemeint, dass wir über alle r_n's summieren, die die Bedingung $\sum_{n=1} n \cdot r_n = m$ erfüllen (Summe über Zerlegungen/Partitionen von m).