Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Blatt 1

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Partielle Ableitungen

a) Seien (x, y, z) voneinander abhängige aber paarweise unabhängige Variablen. Zeigen Sie:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z^{-1}$$

b) Seien (x, y, z, w) voneinander abhängige aber paarweise unabhängige Variablen. Zeigen Sie:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w$$

c) Seien (x, y, z) voneinander abhängige aber paarweise unabhängige Variablen. Zeigen Sie:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Hinweis: Bilden Sie die totalen Differentiale von (x, y, z) und (x, y, z, w).

→ Bitte wenden!

Aufgabe 2: Differentialformen vs. Vektorfelder

a) Sei $\vec{F}$ ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{F}(x,y,z) = 2xy\vec{e}_x + \left(x^2 + 3y^2z^2\right)\vec{e}_y + 2y^3z\vec{e}_z.$$

Gibt es eine Funktion $f(x,y,z)$ so dass $\nabla f = \vec{F}$ gilt? Falls ja, finden Sie eine Funktion f mit dieser Eigenschaft.

b) Sei $\vec{G}$ ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{G}(x,y,z) = 2y(x-1)\vec{e}_x + \left(x^2 - x + 3y^2z^2\right)\vec{e}_y + 2y^3z\vec{e}_z.$$

Gibt es eine Funktion $g(x,y,z)$ so dass $\nabla g = \vec{G}$ gilt? Falls ja, finden Sie eine Funktion g mit dieser Eigenschaft.

Hinweis: Berechnen Sie die Rotation $\nabla \times \vec{F}$ und $\nabla \times \vec{G}$. Was können Sie daraus folgern?

c) Falls für ein Vektorfeld $\vec{F}$ so eine Funktion f existiert, heisst diese eine *primitive Funktion von* $\vec{F}$. Gibt es einen Zusammenhang zwischen Differentialen von Funktionen in $\mathbb{R}^3$ und Vektorfelder $\mathbb{R}^3$, für welche primitive Funktionen existieren?

Bei Fragen E-Mail an *tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de*