Übung zur Vorlesung T4, Anwesenheitsaufgaben 13

24.01.2020

Hinweis für nächste Woche *(Note on next week's tutorial)*

Die Übung nächste Woche wird zum Teil aus einer offenen Fragestunde bestehen. Sie können Ihrem Tutor schon die Woche über Fragen zu Vorlesung, Übung oder Hausaufgaben schicken, die dann in Ihrer Übung besprochen werden. Spontane Fragen sind selbstverständlich auch möglich.
(Next week's tutorial will partly consist of an open question session. Feel free to send your tutor some of your questions on the lecture, the tutorial or the homework in advance. These are going to be discussed in the final tutorial. Feel also free to ask questions spontaneously.)

1. Großkanonische Gesamtheit *(Grand canonical ensemble)*

a) Zeigen Sie, dass in der großkanonischen Gesamtheit die Entropie gegeben ist durch

$$\frac{1}{k}S = \ln Z_G + \beta(E - \mu N).$$

(Show that in the grand canonical ensemble, the entropy is given by the formula above.)

b) Bestimmen Sie die Entropie für das ideale Bose- und Fermigas als Funktion der E_i.
(Find the entropy for the ideal Bose gas and the ideal Fermi gas as a function of the E_i.)

2. Ideales Fermigas in d Dimensionen *(Ideal Fermi gas in d dimensions)*

Betrachten Sie ein ideales Fermigas in einem d-dimensionalen Würfel der Kantenlänge L, d.h.

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m}, \quad \vec{p} = (p_1, \ldots, p_d), \quad V = L^d.$$

Die Impulse sind folgendermaßen quantisiert:

$$\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}(l_1, \ldots, l_d), \quad l_i \in \mathbb{Z}.$$

(Dieses System kann physikalisch z.B. in $d = 1$ oder $d = 2$ realisiert werden, indem die Bewegungsfreiheit von Elektronen auf eine bzw. zwei Dimensionen eingeschränkt wird.)
(Consider an ideal Fermi gas in a d-dimensional cube of length L, as described by the first formula. The quantization of the momentum is given in the second formula. Such a system can be realized physically i.e. for $d = 1$ or $d = 2$ by restricting the movement of electrons to one resp. two dimensions.)

a) Zeigen Sie, dass sich die Summe über alle Impulszustände approximieren lässt durch

$$\sum_{\vec{p}} \approx \Omega_d \frac{L^d}{(2\pi\hbar)^d} \int dp\, p^{d-1},$$

wobei Ω_d die Oberfläche der Einheitssphäre in d Dimensionen ist.
(Show that you can approximate the sum over all momentum states as above. Ω_d is the surface area of the unit sphere in d dimensions.)

b) Führen Sie eine Variablentransformation auf die Energie durch. Das Ergebnis ist von der Form

$$\sum_{\vec{p}} \approx A\, L^d \int dE\, E^{\frac{d}{2}-1}.$$

Bestimmen Sie A.
(Transform the integration variable to the energy. The result is of the form above. Find the value of A.)

c) Berechnen Sie nun für das ideale Fermigas bei der Temperatur $T = 0$ die Teilchendichte $\langle N \rangle / V$ und die Energiedichte $\langle E \rangle / V$ als Funktion der Fermienergie.
(For the ideal Fermi gas at temperature $T = 0$, compute the particle density $\langle N \rangle / V$ and the energy density $\langle E \rangle / V$ as a function of the Fermi energy.)

d) Bestimmmen Sie aus den vorherigen Ergebnissen die durchschnittliche Energie pro Teilchen $\langle E \rangle / \langle N \rangle$.
(Compute the average energy per particle $\langle E \rangle / \langle N \rangle$ from the result of the previous exercise.)