Übung zur Vorlesung T4, Anwesenheitsaufgaben 12

17.01.2020

1. Kanonische Zustandssumme für Fermionen und Bosonen *(Partition function for fermions and bosons)*

Betrachten Sie ein System zweier identischer Teilchen. Das Einteilchensystem habe 3 Energieniveaus $0 = E_0 < E_1 < E_2$ die nicht entartet sind. [Spinentartung soll unterdrückt werden]
(Consider a system of two identical particles. The single particle system has three energy levels $0 = E_0 < E_1 < E_2$ *which are non-degenerate. We will not consider spin degeneracy.)*

a) Die beiden Teilchen seien Fermionen. Machen Sie ein Liste aller Zustände in der Besetzungsbasis und geben Sie die Energieeigenwerte an.
(Let the two particles be fermions. Make a list of all states in the occupancy number basis and state the energy eigenvalues.)

b) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme für den fermionischen Fall.
(Compute the partition function assuming the particles are fermions.)

c) Führen Sie a) und b) für Bosonen durch.
(Do exercises a) and b) for bosons.)

d) Berechnen Sie jeweils die mittlere Energie $\langle H \rangle$.
(Compute the average energy $\langle H \rangle$ *in each case.)*

e) In welchen Zustand geht das System jeweils im Limes $T \to 0$ über?
(Into which state does the system go as $T \to 0$*?)*

2. Zwei-Niveau-System für Bosonen *(Two-level system for bosons)*

Betrachten Sie ein System von N identischen Bosonen. Das Einteilchensystem hat hierbei zwei Energieniveaus $E_0 = 0$ und $E_1 > 0$, die nicht entartet sind.
(Consider a system of N *identical bosons. The single particle system has two non-degenerate energy states* $E_0 = 0$ *und* $E_1 > 0$*.)*

a) Machen Sie eine Liste aller Zustände in der Besetzungszahlbasis und bestimmen Sie die Energien.
(Make a list of all states in the occupancy number basis and find the respective energies.)

b) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme.
(Compute the partition function.)

c) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme für den Fall, dass die Teilchen unterscheidbar sind.
(Compute the partition function assuming that the particles are distinguishable.)

3. Thermodynamik und Bosegase ***(Thermodynamics and Bose gases)***

Das Photonengas erfüllt die Gleichungen

$$\frac{E}{V} = \sigma T^4, \quad pV = \frac{1}{3}E \quad (\sigma \text{ konstant})$$

Wir wollen Teile dieser Gleichungen herleiten.
(The photon gas fulfills the equations above. We would like to derive parts of them.)

a) Zeigen Sie hierzu zunächst allgemein folgende Beziehung:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p.$$

Tipp: Sie können eine Maxwell-Relation von $F(T, V)$ betrachten.
(Start by showing the relation above. Hint: You may consider a Maxwell relation of $F(T, V)$.)

b) Nehmen Sie die folgenden Gleichungen an:

$$\frac{E}{V} = f(T), \quad pV = \frac{1}{3}E$$

(d.h. $\frac{E}{V}$ hängt nur von T ab, aber die genaue Abhängigkeit sei unbekannt). Leiten Sie daraus und aus Teil a) den Zusammenhang

$$f(T) \sim T^4$$

mittels thermodynamischer Überlegungen her.
(Starting from part a) and the equations $\frac{E}{V} = f(T)$, $pV = \frac{1}{3}E$ (i.e. $\frac{E}{V}$ only depends on T with an unknown relation $f(T)$), derive $f(T) \sim T^4$ using thermodynamics.)

c) Wenden Sie nun diese Argumentation auf das Bosegas in der kondensierten Phase an. Auch hier hängt E/V nur von der Temperatur ab. Ferner gilt der Zusammenhang

$$pV = \frac{2}{3}E.$$

(Apply the same argument to the condensed phase of the Bose gas. There, E/V also only depends on temperature (like the photon gas). Furthermore, $pV = \frac{2}{3}E$.)