Übung zur Vorlesung T4, Anwesenheitsaufgaben 11

10.01.20

1. Ideale Quantengase im klassischen Limes großer Volumina

In der Vorlesung hatten wir ideale Quantengase mit der Energie-Impuls-Beziehung

$$E_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{1}$$

in einem Kasten mit Kantenlänge L im Limes großer Volumina betrachtet. In disem Limes kann das Energiespektrum kontinuierlich angenähert werden und die Summation über Energieniveaus durch ein Integral ersetzt werden:

$$\sum_{\vec{l}} \to g \int d^3p \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} \ , \tag{2}$$

wobei $\vec{l} \in \mathbb{Z}$ die Energieniveaus nummeriert und $g = 2s+1$ den Spinentartungsfaktor beschreibt. Dies hatten wir verwendet, um die Gesamtteilchenzahl zu bestimmen. (Hierzu wurden zunächst Kugelkoordinaten im Impulsraum eingeführt, dann die Energie als Integrationsvariable verwendet.)

(In the lecture we studied ideal quantum gases with energy-momentum relation $E_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ located in a cube of length L in the limit of large volumes. In this limit, the energy spectrum can be approximated to be continuous, thus we may replace the sum by an integral (eq. (2)). Here, $\vec{l} \in \mathbb{Z}$ runs over the energy levels and $g = 2s + 1$ describes the degeneracy due to spin. In the lecture we used this method to compute the total number of particles. To do this, we introduced spherical coordinates in momentum space and did a change of variables to integrate over the energy instead of the momentum.)

a) Führen Sie nun eine ähnliche Rechnung durch, um zu zeigen, dass

$$F_G = -\frac{gV}{\lambda^3} kT \left\{ \begin{array}{ll} g_{5/2}(z) & \text{für Bosonen} \\ f_{5/2}(z) & \text{für Fermionen} \end{array} \right. . \tag{3}$$

Hierbei ist

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} \mp 1} = \left\{ \begin{array}{l} g_\nu(z) \\ f_\nu(z) \end{array} \right. , \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu) \ . \tag{4}$$

Weiterhin können Sie ohne Beweis die Formel

$$\ln Z_G = \sum_p \mp \ln(1 \mp e^{-\beta(E_{\vec{p}}-\mu)}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für Bosonen} \\ \text{für Fermionen} \end{array} \right. \tag{5}$$

verwenden.

(Do a similar computation to show eq. (3). For the definition of $g_\nu(z)$ and $f_\nu(z)$, see eq. (4). You may use without proof eq. (5).)

b) Zeigen Sie auch:

$$E = \frac{3gV}{2\lambda^3} kT \begin{cases} g_{5/2}(z) & \text{für Bosonen} \\ f_{5/2}(z) & \text{für Fermionen} \end{cases} . \tag{6}$$

Sie können ohne Beweis die Formel für die Verteilungen verwenden:

$$n(E_{\vec{p}}) = \frac{1}{e^{\beta(E_{\vec{p}} - \mu)} \mp 1} \begin{cases} \text{für Bosonen} \\ \text{für Fermionen} \end{cases} .$$

(Furthermore, show eq. (6). You may use without proof the distribution function given in the second identity.)

2. Relation zwischen E und pV bei idealen Gasen

Betrachten Sie ein ideales Fermigas. Wir hatten gesehen, dass im Kontinuumslimes die Gesamtenergie gegeben ist durch

$$E_{ges} = (2s+1)\frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp\, p^2 \frac{E(p)}{e^{\beta(E(p)-\mu)} + 1} = (2s+1) \int_0^\infty dE\, D(E) E\, n_F(E),$$

wobei *(where)*

$$n_F(E) = \frac{1}{e^{\beta(E(p)-\mu)} + 1} .$$

Im letzten Schritt wurde die Energie als Integrationsvariable eingeführt. Hieraus ergibt sich $D(E)$ durch die Energie-Impuls Beziehung.

(Consider an ideal Fermi gas. The total energy (in the continuum limit) is given by the first equation. In the last step we change the integration variable to E, which yields the additional factor $D(E)$.)

a) Wie lautet $D(E)$, wenn $E(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$? *(Compute $D(E)$ in case $E(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$.)*

b) Wie lautet $D(E)$, wenn $E(\vec{p}) = c|\vec{p}|$? *(Compute $D(E)$ in case $E(\vec{p}) = c|\vec{p}|$.)*

Es gilt auch *(Furthermore, the following holds:)*

$$\frac{pV}{kT} = (2s+1) \int_0^\infty dE D(E) \ln(1 + e^{-\beta(E-\mu)}).$$

c) Zeigen Sie durch partielle Integration der zweiten Gleichung, dass im Fall $E(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ folgt, dass $pV = \frac{2}{3}E$.
(Show that if $E(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$, then $pV = \frac{2}{3}E$. Hint: Apply partial integration to the above expression.)

d) Finden Sie eine ähnliche Beziehung wie in Teil c) für den Fall des ultrarelativistischen idealen Gases ($E(\vec{p}) = c|\vec{p}|$).
(Find a relation similar to the one in part c) in case the gas is ultra-relativistic ($E(\vec{p}) = c|\vec{p}|$).)