Übung zur Vorlesung T4, Anwesenheitsaufgaben 8

06.12.2019

1. Idealer Paramagnet im kanonischen Ensemble *(Ideal paramagnet in the canonical ensemble)*

Wiederholen Sie Aufgabe 1 von Blatt 6, rechnen Sie jedoch diesmal im kanonischen Ensemble: Betrachten Sie N unabhängige magnetische Momente in einem Magnetfeld H. Jedes Moment hat nur 2 mögliche Richtungen $+m$ und $-m$, parallel oder anti-parallel zum Magnetfeld. Die Hamilton Funktion für dieses System ist

$$\mathcal{H}(m_i) = -\sum_{i=1}^{N} H m_i \ , \quad m_i = \pm m \ .$$

Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und den Mittelwert der Energie $\langle H \rangle$.

(Redo exercise 1 from sheet 6 in the canonical (instead of the microcanonical) ensemble: Consider N independent magnetic moments in an external magnetic field H. Every moment has two possible states $+m$ and $-m$ (parallel and anti-parallel to the external field). The Hamiltonian is given by the above formula. Compute the partition function and the average energy $\langle H \rangle$.)

2. Zwei-Niveau Systeme und Multiplizität *(Two level systems and multiplicity)*

Betrachten Sie ein System von N unterscheidbaren Teilchen, wobei jedes Teilchen entweder in einem Zustand mit Energie 0 oder einem Zustand mit Energie Δ sein kann. Die Gesamtenergie des Systems ist also

$$E = \Delta \sum_{i=1}^{N} n_i = N_1 \Delta,$$

wobei $n_i = 0$ falls Teilchen i im Zustand der Energie 0 ist, und $n_i = 1$ falls es im Zustand der Energie Δ ist. Ein Mikrozustand ist also spezifiziert durch Angabe von $[n_1, \dots n_N]$. [Machen Sie sich klar, dass die Kombinatorik für dieses System ganz ähnlich funktioniert wie für den Paramagneten, bzw auch den Schottky-Defekt, den Sie in anderen Aufgaben gesehen haben.]

(Consider a system of N distinguishable particles. Each particle may either be in a state of zero energy or in a state of energy Δ. The total energy is thus given by $E = \Delta \sum_{i=1}^{N} n_i = N_1 \Delta$, where $n_i = 0$ if the particle i is in the zero energy state, and $n_i = 1$ if it is in the state of energy Δ. A microstate can thus be specified by $[n_1, \dots n_N]$. [Realize that the combinatorics problem is very similar as in systems we have seen before, like the paramagnet or the Schottky effect.])

a) Bestimmen Sie die Anzahl von Mikrozuständen $\Omega(E, N)$ für feste Energie E.
(Count the number of microstates $\Omega(E, N)$ at fixed energy E.)

b) Es seien $E = 3\Delta$ und $N = 4$. Bestimmen Sie die mikrokanonische Wahrscheinlichkeit $\rho_{MK}([n_1, \dots n_4])$ der folgenden Mikrozustände:

(Let $E = 3\Delta$ und $N = 4$. Compute the microcanonical probability $\rho_{MK}([n_1, \dots n_4])$ of the following microstates:)

(i) $[n_1, n_2, n_3, n_4] = [0, 0, 0, 0]$,

(ii) $[n_1, n_2, n_3, n_4] = [0, 1, 1, 1]$.

c) Bestimmen Sie für gegebenes E, N aus $\rho_{MK}([n_1, \dots n_N])$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(n_1)$ für das erste Teilchen. Geben Sie außerdem an, was die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass $n_1 = 0$ ist.
(For given E, N, compute the probability distribution of the first particle $\rho(n_1)$ from $\rho_{MK}([n_1, \dots n_N])$. Furthermore, compute the probability for $n_1 = 0$.)

d) Betrachten Sie nun dasselbe System in der kanonischen Gesamtheit mit $N = 4$. Die Energie ist eine Zufallsvariable. Bestimmen Sie $\rho_K(E = 2\Delta)$.
(Now consider the same system in the canonical ensemble with $N = 4$. Now the energy is a random variable. Compute $\rho_K(E = 2\Delta)$.)

3. Großkanonische Gesamtheit *(Grand canonical ensemble)*

Betrachten Sie eine großkanonische Gesamtheit. *(Consider the grand canonical ensemble.)*

a) Zeigen Sie $\langle N \rangle = z\frac{\partial}{\partial z} \ln Z_G$, wobei Z_G die großkanonische Zustandssumme ist und z die Fugazität.
(Show the formula above, where Z_G is the grand partition function and z is the fugacity.)

b) Zeigen Sie, dass *(Show)*

$$\sigma_N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = z\frac{\partial}{\partial z} z\frac{\partial}{\partial z} \ln Z_G.$$

c) Aus der Thermodynamik wissen wir, dass das Differential des großkanonischen Potentials F_G gegeben ist durch

$$dF_G = -SdT - pdV - Nd\mu \ .$$

Zeigen Sie, dass das Differential von $F_G = -kT \ln Z_G$ in der großkanonischen Gesamtheit diese Form annimmt, d.h. verifizieren Sie, dass

$$\left(\frac{\partial F_G}{\partial \mu}\right)_{T,V} = -\langle N \rangle, \quad \left(\frac{\partial F_G}{\partial T}\right)_{V,\mu} = -S.$$

Die folgende Formel aus der Vorlesung dürfen Sie ohne Beweis benutzen:

$$F_G(T, V, \mu) = \langle H \rangle - TS - \mu \langle N \rangle.$$

(From thermodynamics we know that the differential of the grand canonical potential F_G is given by $dF_G = -SdT - pdV - Nd\mu$. Show that the differential of $F_G = -kT \ln Z_G$ takes the same form, i.e. verify explicitly

$$\left(\frac{\partial F_G}{\partial \mu}\right)_{T,V} = -\langle N \rangle, \quad \left(\frac{\partial F_G}{\partial T}\right)_{V,\mu} = -S.$$

You may use without proof the formula $F_G(T, V, \mu) = \langle H \rangle - TS - \mu \langle N \rangle$ from the lecture.)