Übung zur Vorlesung T4, Anwesenheitsaufgaben 7

29.11.2019

1. Kurzfragen zur mikrokanonischen Gesamtheit *(Short questions on the microcanonical ensemble)*

Betrachten Sie die mikrokanonische Gesamtheit. *(Consider the microcanonical ensemble.)*

a) Ein System hat 5 Mikrozustände der Energie E_1 und 100 Mikrozustände der Energie E_2. Bestimmen Sie $S(E_1)$.
(A system has 5 microstates at the energy E_1 and 100 microstates at the energy E_2. Find $S(E_1)$.)

b) Betrachten Sie die folgenden Situationen und diskutieren Sie, ob der Gibbs-Faktor beim Abzähle der Zustände hinzuzunehmen ist oder nicht.
(Discuss whether the Gibbs factor is required in counting the states in the following situations:)

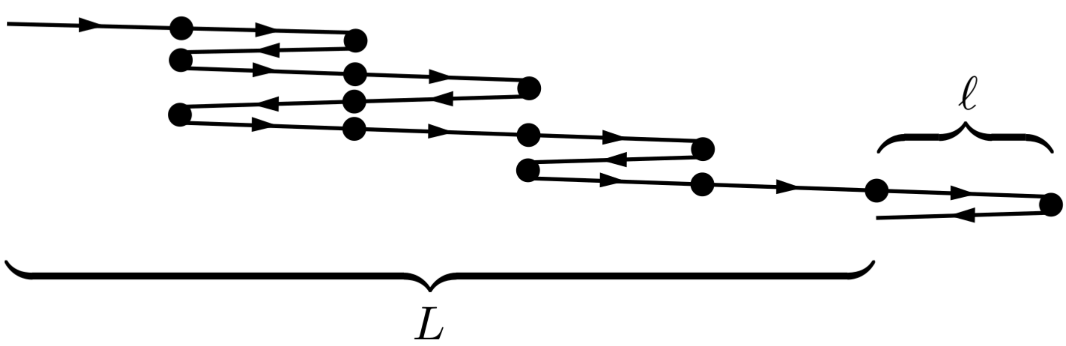
(i) Atome, die im Kristallgitter eingebunden sind. *(Atoms in a crystal lattice.)*

(ii) Gas mit relativistischer Energie-Impuls Beziehung $E = |\vec{p}|c$, statt der Beziehung $E = |\vec{p}|^2/2m$. *(A gas with relativistic energy-impulse relation $E = |\vec{p}|c$ instead of the classical $E = |\vec{p}|^2/2m$.)*

(iii) Gittergas, d.h. die Gasatome sitzen an festen Gitterplätzen.
(A "lattice gas", i.e. a gas where the atoms are located at fixed lattice positions.)

2. Gummiband *(Rubber band)*

Polymere, wie z.B. Gummi, bestehen aus sehr langen Molekülen, die typischerweise auf eine Art und Weise verknäuelt sind, die eine hohe Entropie besitzen. Als ein sehr vereinfachtes Modell eines Gummibandes betrachten Sie eine Kette aus N Gliedern, jedes der Länge ℓ.



Nehmen Sie an, dass jedes Glied nur zwei mögliche Zustände besitzt, es zeigt entweder nach links oder nach rechts. Die Gesamtlänge L des Gummibandes ist die Netto-Distanz vom Beginn

des ersten Gliedes bis zum Ende des letzten.
(Polymeres like rubber consist of very long molecules which are usually entangled in such a way that the total entropy is very high. As a very simple model for a rubber band, we consider a chain of N links, each chain link of length ℓ. Now assume that each chain link only has two possible states – pointing left or right. The total length L is the net distance from the first chain link to the last. See the picture for details.)

a) Finden Sie einen Ausdruck für die Entropie dieses Systems als Funktion von N und N_R, der Anzahl der Kettenglieder, die nach rechts zeigen. Benutzen Sie Stirlings Formel, um Ihr Ergebnis für große N und N_R zu approximieren.
Hinweis: Stirling: $\ln N! = N \ln N - N$
(Find an expression for the entropy of the system as a function of N and N_R, where the latter is the number of chain links pointing right. Use Stirling's formula $\ln N! = N \ln N - N$ to approximate the result for large N and N_R.)

b) Drücken Sie L durch N und N_R aus. *(Find L as a function of N and N_R.)*

c) Bestimmen Sie das Differential dU der inneren Energie. Führen Sie hierzu eine Spannkraft F des Fadens ein, die positiv ist, wenn das Gummiband nach innen zieht.
(Find the differential of the inner energy dU. Introduce a tension force F which is positive if the rubber band pulls inwards.)

d) Zeigen Sie, dass *(Show that)* $F = \frac{kT}{2\ell} \ln \left[(1 + \frac{L}{N\ell})/(1 - \frac{L}{N\ell}) \right]$.

e) Zeigen Sie, dass für $L \ll N\ell$ die Spannkraft direkt proportional zu L ist (Hookesches Gesetz). *(Show that for $L \ll N\ell$ the tension force is proportional to L (Hooke's law).)*

f) Wenn Sie die Temperatur erhöhen, zieht sich das Band zusammen oder dehnt es sich aus?
(Does the rubber band expand or contract when increasing the temperature?)

3. Kanonische Gesamtheit, Kurzwiederholung *(Quick revision of the canonical ensemble)*

Betrachten Sie eine kanonische Gesamtheit. *(Consider the canonical ensemble.)*

a) Zeigen Sie $\langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$, wobei Z die Zustandssumme ist und $\beta = 1/kT$.
(Show $\langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$, where Z is the partition function and $\beta = 1/kT$.)

b) Zeigen Sie, dass *(Show)*

$$\sigma_E^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z$$

c) Zeigen Sie, dass *(Show)*

$$\sigma_E^2 = kT^2 C_V,$$

wobei $C_V = \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial T}$ die Wärmekapazität ist *(where C_V is the heat capacity.)*

d) Argumentieren Sie, dass $\frac{\sigma}{\langle H \rangle}$ für große N gegen Null geht. *(Argue that $\frac{\sigma}{\langle H \rangle}$ goes to zero for large N.)*