Übung zur Vorlesung T4, Anwesenheitsaufgaben 5

15.11.2019

1. Cauchy-Verteilung *(Cauchy distribution)*

Betrachten Sie folgende Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x) = \frac{a}{b^2 + x^2} \ ,$$

bekannt als die Cauchy-Verteilung (oder auch Lorentz-Verteilung).
(Consider the above probability density, called the Cauchy (or Lorentz) distribution.)

a) Finden Sie eine Beziehung zwischen a und b aus der Normierungsbedingung. Sie können $\frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1+y^2}$ verwenden und $b > 0$ annehmen.
(Find a relation between a and b from the distribution's normalisation. You may use the above identity and assume $b > 0$.)

b) Bestimmen Sie die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung.
(Find the cumulative distribution function.)

c) Zeigen Sie, dass für die Verteilung der Integralausdruck für $\langle x^2 \rangle$ divergiert.
(Show that the integral in $\langle x^2 \rangle$ diverges.)

d) Gilt für n Zufallsveriablen, die gemäß dieser Wahrscheinlichkeitsdichte verteilt sind, der zentrale Grenzwertsatz, wie er in der Vorlesung besprochen wurde?
(Does the central limit theorem from the lecture apply to n random variables whose probability distribution is given by to the distribution above?)

2. Bedingte Wahrscheinlichkeit *(Conditional probability)*

Betrachten Sie die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x,y) = \begin{cases} 6(1-x-y) & \text{falls} \begin{cases} 0 \le x \\ 0 \le y \\ x+y \le 1 \end{cases} \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

(Consider the above probability density.)

a) Fertigen Sie ein Skizze von $p(x,y)$ an. *(Make a sketch of the distribution.)*

b) Berechnen Sie $p(x)$ durch Integration über y. Beachten Sie die Integrationsgrenzen.
(Compute $p(x)$ by integrating over y. Pay attention to the integral boundaries.)

c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(y|x)$.
(Compute the conditional probability $p(y|x)$.)

3. Maximierung der Shannon-Entropie ***(Maximising the shannon entropy)***

Betrachten Sie N mögliche Versuchsergebnisse, die mit Wahrscheinlichkeit p_i, $i = 1, \dots N$, eintreten. Die Shannon-Entropie ist definiert als

$$S = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i .$$

In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass S maximal in der Gleichverteilung $p_i = 1/N$ ist.
(Consider N possible outcomes of an experiment which happen with respective probabilities p_i, $i = 1, \dots N$. The Shannon entropy is given by the formula above. In the lecture we have shown that it is maximised by the uniform distribution $p_i = 1/N$.)

a) Verifizieren Sie dies noch einmal, indem Sie S unter der Nebenbedingung $\sum_i p_i = 1$ extremieren. Verwenden Sie Lagrange-Multiplikatoren.
(Rederive this result by extremising S subject to the constraint $\sum_i p_i = 1$. Use Lagrange multipliers.)

b) Nehme Sie nun an, dass der Erwartungswert einer Observable bekannt ist, also

$$\sum_{i=1}^{N} p_i E_i = E$$

Extremieren Sie die Entropie unter dieser Nebenbedingung und zeigen Sie dass

$$p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} ,$$

wobei β ein Lagrange-Multiplikator ist. Was ist Z?
(Now assume that the expectation value of an observable is known, i.e.

$$\sum_{i=1}^{N} p_i E_i = E .$$

Find the extremum of the entropy subject to this constraint and show that

$$p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} ,$$

where β is a Lagrange multiplier. What is the value of Z?)