LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

FAKULTÄT FÜR PHYSIK IM WISE 2019/20
T2: QUANTENMECHANIK 1
DOZENT: PROF. DR. ULRICH SCHOLLWÖCK
ÜBUNGEN: DR. F. GRUSDT, S. MARDAZAD, M. GRUNDNER

www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/wise_19_20/T2_quant_mech

Blatt 11:

Ausgabe: Freitag, 10.01.20; Abgabe: Freitag, 17.01.20, 12:30 Uhr

Aufgabe 1 Drehimpuls im 2D Harmonischen Oszillator

Betrachten Sie den zweidimensionalen harmonischen Oszillator, mit Hamiltonoperator:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\left(\omega_x^2\ \hat{x}^2 + \omega_y^2\ \hat{y}^2\right). \tag{1}$$

(1.a) (**4 Punkte**) Berechnen Sie das Spektrum von $\hat{\mathcal{H}}$, indem Sie Leiteroperatoren $\hat{a}_x^{(\dagger)}$ und $\hat{a}_y^{(\dagger)}$ einführen. Sie dürfen aus der Vorlesung bekannte Ergebnisse zum harmonischen Oszillator verwenden. Geben Sie die Entartung der jeweiligen Eigenzustände der Energie an: (i) für den Fall generischer $\omega_x, \omega_y \in \mathbb{R}$ und (ii) für den Fall $\omega_x = \omega_y = \omega$.

(1.b) (**4 Punkte**) Drücken Sie den Drehimpulsoperator $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ durch die Leiteroperatoren $\hat{a}_x^{(\dagger)}$ und $\hat{a}_y^{(\dagger)}$ aus. Berechnen Sie $[\hat{\mathcal{H}}, \hat{L}_z]$. Wann kommutiert $\hat{\mathcal{H}}$ mit $\hat{L}_z$? Diskutieren Sie die physikalische Bedeutung dieser Bedingung.

(1.c) (**4 Punkte**) Betrachten Sie nun den symmetrischen Fall $\omega_x = \omega_y = \omega$. Drücken Sie sowohl den Hamiltonoperator $\hat{\mathcal{H}}$ als auch den Drehimpulsoperator $\hat{L}_z$ durch Linearkombinationen von Zahloperatoren $\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+$ und $\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-$ aus, indem Sie neue Leiteroperatoren $\hat{a}_\pm = \alpha_x \hat{a}_x \pm \alpha_y \hat{a}_y$ einführen und $\alpha_x, \alpha_y \in \mathbb{C}$ bestimmen. Welche Quantenzahlen ergeben sich damit für die (entarteten) Eigenzustände?

Aufgabe 2 Alternative Herleitung der Störungstheorie

In dieser Aufgabe lernen Sie eine weniger abstrakte – und weniger flexible – Darstellung der nicht-entarteten Störungstheorie kennen. Wir betrachten den Hamiltonoperator

$$\hat{\mathcal{H}}(\lambda) = \hat{\mathcal{H}}_0 + \lambda \hat{V}, \tag{2}$$

wobei $\hat{\mathcal{H}}_0$ den ungestörten Hamiltonoperator bezeichne [mit: $\hat{\mathcal{H}}_0|n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|n^{(0)}\rangle$, $E_n^{(0)} < E_{n+1}^{(0)}$] und $\lambda\hat{V}$ eine beliebige Störung sei.

(2.a) (**2 Punkte**) Schreiben Sie die Eigenzustände und Energien, $|n_\lambda\rangle$ und $E_n(\lambda)$, als allgemeine Potenzreihen in λ.

(2.b) (**3 Punkte**) Betrachten Sie das gestörte Eigenwertproblem $\hat{\mathcal{H}}(\lambda)|n_\lambda\rangle = E_n(\lambda)|n_\lambda\rangle$. In verschiedenen Ordnungen in λ ergeben sich jeweils unabhängige Gleichungen. Geben Sie die ersten drei Gleichungen (nullte bis zweite Ordnung, $\nu = 0, 1, 2$) explizit an.

(2.c) (**4 Punkte**) Lösen Sie die Gleichung zu $\nu = 1$ aus (2.b), indem Sie die Eigenzustände $|n_\lambda\rangle$ in der Orthonormalbasis $\{|m^{(0)}\rangle\}_m$ entwickeln und die normierten Entwicklungskoeffizienten $c_{n,m}^{(1)}$ bestimmen. Leiten Sie den Ausdruck für die gestörte Eigenenergie $E_n^{(1)}(\lambda)$ zu erster Ordnung in λ her.

(2.d) (**2 Punkte**) Leiten Sie den Ausdruck für die gestörte Eigenenergie $E_n^{(2)}(\lambda)$ zu zweiter Ordnung in λ her.

Aufgabe 3 Harmonischer Oszillator im Feld

Im Folgenden betrachten wir als ungestörtes Problem den eindimensionalen harmonischen Oszillator,

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2\right). \tag{3}$$

Wir werden verschiedene gestörte Probleme $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \lambda\hat{V}$ behandeln. Verwenden Sie dazu den Formalismus für Störungstheorie den Sie in der Vorlesung kennengelernt haben.

(3.a) (**4 Punkte**) Betrachten Sie den harmonischen Oszillator im externen Feld:

$$\lambda\hat{V} = -F\hat{x}. \tag{4}$$

Bestimmen Sie die Eigenzustände bis zur ersten, und die Eigenenergien bis zur zweiten Ordnung in λ für das gestörte Problem.

(3.b) (**2 Punkte**) Exakte Lösung von (3.a): Schreiben Sie zunächst das gestörte Problem indem Sie $\hat{\mathcal{H}}$ durch Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren ausdrücken. Wenden Sie dann die unitäre Transformation $\hat{D}_\alpha = \exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)$ aus Aufgabe (1.a), (1.b) von Blatt 6 mit passend gewähltem α an und bestimmen Sie das exakte Spektrum von $\hat{\mathcal{H}}$.

(3.c) (**5 Punkte**) Betrachten Sie den harmonischen Oszillator mit kubischer Störung:

$$\lambda\hat{V} = \lambda\hat{x}^3. \tag{5}$$

Bestimmen Sie die Zustände in 1. Ordnung und die Energien in 2. Ordnung Störungstheorie.