Blatt 3:

Ausgabe: Donnerstag, 31.10.19; Abgabe: Freitag, 08.11.19, 12:30 Uhr

Aufgabe 1 Lineare Algebra

Betrachten Sie einen Vektorraum der durch die Eigenzustände $|a_n\rangle$, zu Eigenwerten a_n, eines hermiteschen Operators $\hat{A}$ aufgespannt wird. Nehmen Sie an dass die Eigenwerte nicht entartet sind, d.h. $a_n \neq a_m$ für alle $n \neq m$.

(1.a) (**3 Punkte**) Beweisen Sie folgende Darstellung des Nulloperators:

$$\prod_n \left(\hat{A} - a_n\right) = \hat{0}. \tag{1}$$

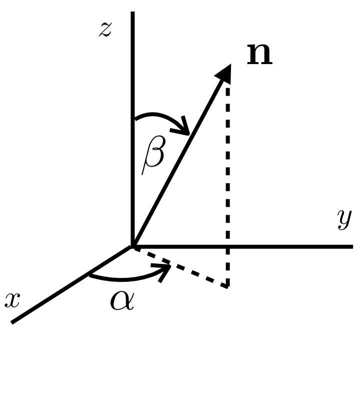
(1.b) (**3 Punkte**) Sei n fest vorgegeben. Welche Bedeutung hat folgender Operator (beschreiben Sie seine Wirkung auf Basiszustände):

$$\hat{Q}_n = \prod_{m \neq n} \frac{\left(\hat{A} - a_m\right)}{(a_n - a_m)} \tag{2}$$

(1.c) (**3 Punkte**) Erläutern Sie die Eigenschaften (1.a) und (1.b) wenn der Operator $\hat{A}$ durch den Operator $\hat{S}^z = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}^z$ eines spin-$1/2$ Systems gegeben ist (mit $\hat{\sigma}^z$ einer der Paulimatrizen, siehe Blatt 0, Aufgabe 1.g).

Aufgabe 2 Ein Eigenwertproblem

Gegeben sei ein normierter Vektor $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^3$, der durch die im Bild gezeigten Winkel α und β charakterisiert ist:



(2.a) (**6 Punkte**) Konstruieren Sie einen Eigenvektor des Operators $\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{n}$, den wir im Folgenden mit $|\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n}, +\rangle$ bezeichnen, mit der Eigenschaft:

$$\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{n} \, |\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n}, +\rangle = +\frac{\hbar}{2} \, |\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n}, +\rangle. \tag{3}$$

Drücken Sie den Vektor als Linearkombination der Basisvektoren $|+\rangle$ und $|-\rangle$ des Spin-$1/2$ Systems mit Spin-Operator $\hat{\boldsymbol{S}} = (\hat{S}^x, \hat{S}^y, \hat{S}^z)$ aus. Dabei ist $\hat{S}^\mu = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}^\mu$ durch die Paulimatrizen $\hat{\sigma}^\mu$, für $\mu = x, y, z$, gegeben, siehe Blatt 0, Aufgabe 1.g.

Hinweis: Die Lösung ist:

$$|\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n}, +\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) |+\rangle + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\alpha} |-\rangle. \tag{4}$$

Behandeln Sie das Problem jedoch als Eigenwertproblem (es genügt nicht zu verifizieren dass der Vektor in Gl. (4) die Eigenwertgleichung erfüllt). Verwenden Sie auch keine Rotationsoperatoren, die Sie später noch kennenlernen werden.

Aufgabe 3 Ein Spin-$1/2$ Problem

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Problem mit zwei orthonormalen Basiszuständen $|+\rangle$ und $|-\rangle$. Nehmen Sie weiter an, dass dieses spin-$1/2$ System in einem Eigenzustand des Operators $\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{n}$ ist, den wir in Aufgabe 2 kennengelernt haben, mit Eigenwert $+\hbar/2$. Betrachten Sie den Spezialfall wenn der Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ in der $x - z$ Ebene liegt und mit der positiven z-Achse einen Winkel γ bildet.

(3.a) (**3 Punkte**) Betrachten Sie eine Messung des Operators $\hat{S}^x$ (Definition in Aufgabe 2.a), dessen Eigenwerte $\pm\hbar/2$ sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der positive Eigenwert $+\hbar/2$ gemessen?

(3.b) (**4 Punkte**) Berechnen Sie die *Varianz* von $\hat{S}^x$, die definiert ist durch:

$$\left\langle \left(\hat{S}^x - \langle \hat{S}^x \rangle \right)^2 \right\rangle. \tag{5}$$

Diskutieren Sie das Ergebnis danach in den Spezialfällen $\gamma = 0, \pi/2$ und π.

Aufgabe 4 Ein Problem mit drei Basiszuständen

Betrachten Sie eine quantenmechanische Observable die durch die folgende 3×3 Matrix beschrieben wird:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

(4.a) (**3 Punkte**) Bestimmen Sie die zu dieser Observable gehörigen normierten Eigenvektoren und Eigenwerte. Gibt es Entartungen?

Aufgabe 5 Ein Problem mit zwei Observablen

Betrachten Sie ein quantenmechanisches System mit einer Orthonormalbasis $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$. Betrachten Sie ferner zwei Observablen, die in dieser Basis dargestellt werden durch die folgenden Matrizen:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

(5.a) (**2 Punkte**) Die Observable $\hat{A}$ hat ein entartetes Spektrum. Gilt dies auch für Observable $\hat{B}$? Geben Sie die Spektren beider Observablen an.

(5.b) (**2 Punkte**) Zeigen Sie, dass $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutieren.

(5.c) (**6 Punkte**) Bestimmen Sie einen gemeinsamen Satz von orthonormalen Eigenvektoren der Observablen $\hat{A}$ und $\hat{B}$. Geben Sie zu jedem dieser Eigenvektoren die zugehörigen Eigenwerte beider Observablen an. Ist diese Angabe beider Eigenwerte ausreichend, um die Eigenvektoren vollständig zu charakterisieren?