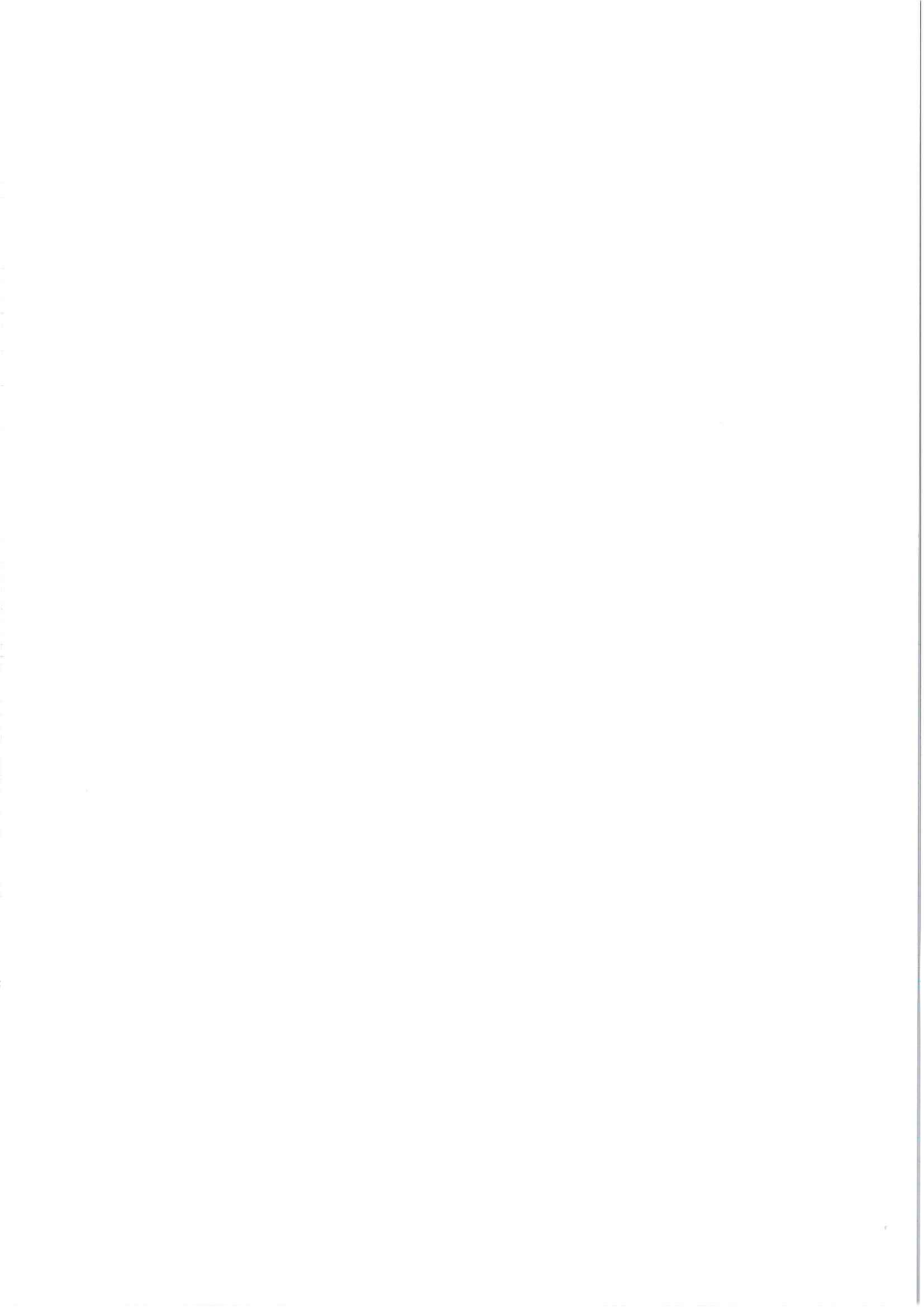


# Inhalt

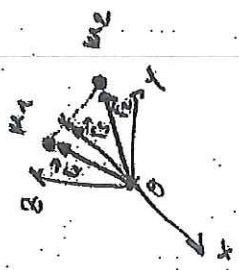
	Vorlesung	Übung
• Mechanik	15.10./22.10.	25.10./8.11.
• Optik	5.11./12.11	15.11./22.11.
• Elektrizitätslehre	19.11/26.11	29.11./06.12.
• Festkörperphysik	03.12./10.12.	13.12./20.12.
• Kernphysik	17.12./7.1.	10.1./17.1.
• Atom+Molekülphysik	14.1./21.1.	24.1./31.1.
• Wärmelehre	28.1.	4.2.



## 6 Systeme von Massenpunkten

### Schwerpunkt

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$



$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

### Schwerpunktsgeschwindigkeit

$$\vec{v}_S = \dot{\vec{r}}_S = \frac{d\vec{r}_S}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

### Schwerpunktimpuls

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \cdot \vec{v}_S$$

### Impulserhaltungssatz (ohne äußere Kräfte)

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const.} \rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{F}_{iS} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}} = 0$$

### Schwerpunktsatz (mit äußeren Kräften)

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{iS} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_S}{dt} = M \vec{a}_S$$

Bewegung des Schwerpunkts S so als ob alle Masse in S konzentriert und alle Kräfte in Schwerpunkt

## kinetische Energie ( $\frac{1}{2} M v^2$ )

betrachte:  $\vec{v}_i = \vec{v}_{is} + \vec{v}_s$

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= m_i \vec{v}_i, \vec{P} = M \cdot \vec{v}_s \rightarrow \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i = m_i \cdot \vec{v}_{is} + m_i \cdot \vec{v}_s \\ &= m_i \cdot \vec{v}_{is} + m_i \cdot \frac{M}{M} \vec{v}_s \\ &= m_i \cdot \vec{v}_{is} + \frac{m_i}{M} \vec{P} \end{aligned}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{is} + \frac{m_i}{M} \vec{P}$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_{is} = \sum_{i=1}^N \left( \vec{p}_i - \frac{m_i}{M} \vec{P} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{P}$$

$$= \sum_{i=1}^N \vec{p}_i - \frac{\vec{P}}{M} \sum_{i=1}^N m_i = \vec{P} - \vec{P} = 0$$

$$\rightarrow E_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^N E_{\text{kin},i} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\vec{v}_{is} + \vec{v}_s)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left[ \vec{v}_{is}^2 + 2 \vec{v}_{is} \cdot \vec{v}_s + \vec{v}_s^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2 m_i} \left[ \vec{p}_{is} + \frac{m_i}{M} \vec{P} \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2 m_i} \left[ \vec{p}_{is}^2 + \frac{m_i^2}{M^2} \vec{P}^2 + 2 \frac{m_i}{M} \vec{P} \cdot \vec{p}_{is} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2 m_i} \frac{\vec{p}_{is}^2}{2 m_i} + \frac{\vec{P}^2}{M^2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2 m_i} + \frac{\vec{P}}{M} \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{p}_{is}}{2 m_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_{is}^2}{m_i} + \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{P}}{M} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{is} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_{is}^2}{m_i} + \frac{\vec{P}^2}{2M} - \vec{P} \cdot \vec{P} = 0$$

$$\rightarrow E_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}^{\text{bezüglich Schwerpunkts}} + \frac{\vec{P}^2}{2M}$$

kinetische Energie

des Schwerpunkts

• reduzierte Masse im Zweikörpersystem

$$\sum \vec{p}_i = 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 =: \vec{p}$$

$$E_{kin} = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) \cdot p^2$$

$$\rightarrow \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

reduzierte Masse

$$\rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 = \frac{1}{2} \mu v_{rel}^2 \quad \text{mit } v_{rel} := v_1 - v_2$$

$$\left( \vec{v}_{rel} := \frac{1}{\mu} \vec{p}_2 = \frac{m_2 + m_2}{m_1 m_2} \vec{p}_2 = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{p}_2 = \frac{\vec{p}_2}{m_1} + \frac{\vec{p}_2}{m_2} \right)$$

$$= \frac{\vec{p}_2}{m_1} - \frac{\vec{p}_1}{m_2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) - (\vec{v}_1 + \vec{v}_3) = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

• Drehimpuls

$$\rightarrow L_O = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{r}}_i \times \vec{r}_i) \times (\vec{v}_i \times \vec{v}_i)$$

(ausmultiplizieren und vereinfachen) ...

$$\rightarrow L_O = \vec{L}_S \times \vec{P} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iS} \times \vec{p}_{iS} =: \vec{L}_S \times \vec{P} + \vec{L}_S$$

bezüglich Ursprung O bezüglich Schwerpunkt

• Drehmoment

$$\vec{D}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{\dot{\vec{r}}_S \times \vec{P}}_{=0} + \underbrace{\vec{r}_S \times \dot{\vec{P}}}_{=0} + \sum_{i=1}^N \underbrace{\vec{r}_{iS} \times \dot{\vec{p}}_i}_{=0} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iS} \times \vec{F}_i$$

$$\vec{D}_O = \vec{r}_S \times \dot{\vec{P}} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iS} \times \dot{\vec{p}}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_S \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iS} \times \vec{F}_i$$

$$= \vec{r}_S \times \dot{\vec{P}} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_S \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iS} \times \vec{F}_i$$

$$= \vec{r}_S \times \dot{\vec{P}} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iS} \times \vec{F}_i + \vec{D}_S$$

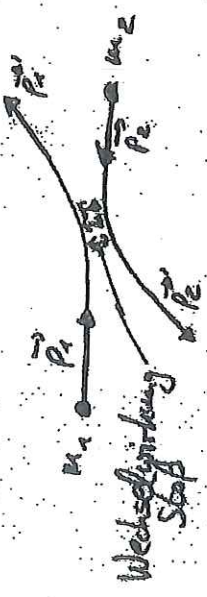
$$\vec{F}_a = \dot{\vec{P}} \quad (\text{Schub- / Pullkraft})$$

$$\vec{F}_{iS} = \vec{F}_i + \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik}$$

$$\vec{D}_S := \sum_{i=1}^N \vec{r}_{iS} \times \vec{F}_i$$

bezüglich Ursprung bezüglich Schwerpunkt

## 6.1 Stöße (Zwischen zwei Teilchen)



Impulssatz  
(ohne äußere Kräfte)

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

$$E_{kin} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} + Q \quad \text{Energiesatz}$$

$$E_{kin} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_{CM}^2}{2M} + \frac{p_{rel}^2}{2\mu} \quad ; \quad \vec{p}_{CM} = -\vec{p}_{rel}$$

$$\rightarrow \frac{p_{rel}^2}{2\mu} + \frac{p_{rel}^2}{2M} = \frac{p_{rel}^2}{2\mu} + \frac{p_{rel}^2}{2M} + Q$$

$$\rightarrow \frac{p_{rel}^2}{2\mu} = \frac{p_{rel}^2}{2\mu} + Q \quad \text{Energiesatz}$$

## Arten von Stößen

- $Q = 0$  elastische Stöße
- $Q < 0$  inelastische Stöße (kinet. Energie  $\rightarrow$  innere Energie)
- $Q > 0$  superelastische Stöße (innere Energie  $\rightarrow$  kinet. Energie)

NB: inelastische/superelastische Stöße  $\Leftrightarrow$  ein Stoßpartner hat innere Struktur



## Zentrale Stöße

• elastischer Stoß ( $Q=0$ )

Wähle rückwärts Stoffpartner:  $p_2 = 0$

$$p_1 = p_1' + p_2' \Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\frac{p_1}{2m_1} = \frac{p_1'}{2m_1} + \frac{p_2'}{2m_2} \Rightarrow m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_2} = \frac{m_1}{m_2} (v_1 - v_2')$$

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 \left[ \frac{m_1}{m_2} (v_1 - v_2') \right]^2$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = \frac{m_1^2}{m_2} (v_1 - v_2')^2$$

$$m_2 (v_1^2 - v_1'^2) = m_1 (v_1 - v_2')^2 \quad | \cdot \frac{1}{v_1 - v_2'}$$

$$m_2 (v_1 + v_2') = m_1 (v_1 - v_2')$$

$$\rightarrow \dots \rightarrow v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

$$\rightarrow \dots \rightarrow v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

$$\rightarrow p_1 = m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' = \frac{m_1^2 - m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 = p_1' + p_2'$$

$$\rightarrow p_2 = \frac{p_1'}{2} + 2 \frac{p_1 \cdot v_1}{v_1} \rightarrow p_2' = 2p_1$$

## Beispiele:

►  $m_1 = m_2 = m$  →  $v_1' = 0, v_2' = 0$   
 $v_1 \neq 0, v_2 = 0$  →  $v_2' = \frac{2m}{m+m} v_1 = v_1$

►  $m_1 = \frac{1}{2} m_2$

$$\rightarrow v_1' = \frac{\frac{1}{2} m_2 - m_2}{\frac{1}{2} m_2 + m_2} \cdot v_1 = \frac{-\frac{1}{2} m_2}{\frac{3}{2} m_2} v_1 = -\frac{1}{3} v_1$$

$$v_2' = \frac{m_2}{\frac{1}{2} m_2 + m_2} \cdot v_1 = \frac{1 m_2}{\frac{3}{2} m_2} v_1 = \frac{2}{3} v_1$$

►  $m_1 = 2 m_2$

$$\rightarrow v_1' = \frac{2m_2 - m_2}{2m_2 + m_2} v_1 = \frac{1m_2}{3m_2} v_1 = \frac{1}{3} v_1$$

$$v_2' = \frac{4m_2}{3m_2} v_1 = \frac{4}{3} v_1$$

## Energieübertrag 1 → 2:

$$\Delta E_{kin} = \frac{p_2'^2}{2m_2} - \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \frac{(m_1 + m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{2v_1^2}{m_2}$$

$$= \frac{4m_2 m_1}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot E_{kin1}$$

$$\Delta E_{kin} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot E_{kin1} = \frac{4\mu}{(m_1 + m_2)} \cdot E_{kin1}$$

• maximal inelastischer total unelastischer zentrale Stöße

d.h.  $v_1' = v_2' =: v'$

$p_2 = m_2 v_2 = 0$ :  $m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' = (m_1 + m_2) v'$   
 $Q + \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2$

$v' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

und  $Q_{\text{inn}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$

Zunahme der inneren Energie  
 innere kinet. Energie bezgl. Schwerpunktes

$Q = \frac{m_1 + m_2}{2} v'^2 - \frac{m_1 v_1^2}{2} = \left( \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{m_1}{2} \right) v_1^2$   
 $= \frac{m_1}{2} \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} - 1 \right) v_1^2 = - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{v_1^2}{2} = - \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2$

Nicht-zentrale Stöße

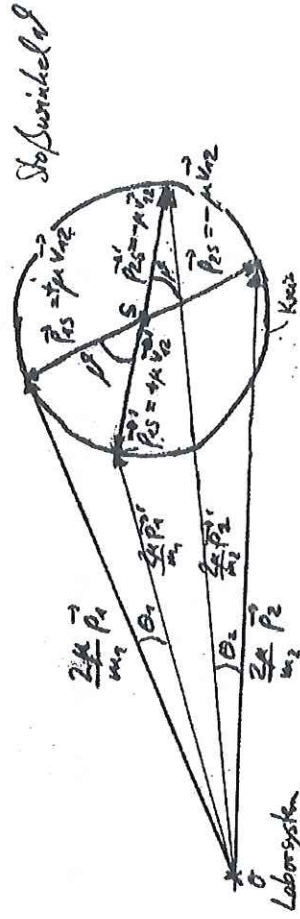
- Impulsatz:  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$
- Drehimpulsatz:  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_1' + \vec{L}_2'$   
 (ohne äußere Kräfte)  $\hookrightarrow$  Stoß läuft in Ebene  $\perp$   $\vec{L}_{\text{ab}}$   
 $\hookrightarrow$  Stoßebene

Energiesatz:  $Q + \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2'^2}{2m_2}$

• Stoß im Schwerpunktsystem:

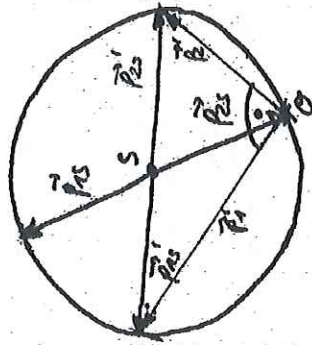


elast. Stoß im Schwerpunktsystem  
 $0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$   
 $\hookrightarrow$  elastischer Stoß dreht  $\vec{p}_{1S}$  nach  $\vec{p}_{1S}'$ , aber  $|\vec{p}_{1S}'| = |\vec{p}_{1S}|$



NB: Diagramm mit Geschwindigkeiten  $\rightarrow$  Newton-Diagramm

Spezialfall:  $m_1 = m_2 =: m$  und  $\vec{p}_2 = 0$  (aber  $\vec{p}_{2S} \neq 0$ )  
 $\rightarrow p_e = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \cdot m}{m + m} = \frac{m}{2}$

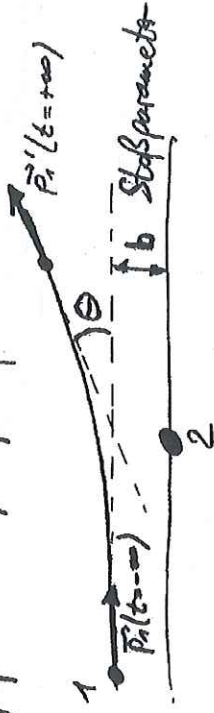


(Theorem)

$\rightarrow 90^\circ$  Winkel zwischen Stoßpartnern nach Stoß!

Stoß zwischen ausgedehnten Körpern

Stoßparameter / Impactparameter



Stoßparameter / Impactparameter  $b$

$\leftrightarrow$  Zentralität des Stoßes

$b = 0 \leftrightarrow$  Zentraler Stoß

$b > 0 \leftrightarrow$  Nicht-zentraler Stoß

Streuwinkel / Ablenkwinkel  $\Theta$

ist Funktion des Stoßparameters  $b$

NB: Nicht-zentraler (= ex-zentrischer) Stoß  
 zwischen Körpern  $\rightarrow$  Drehmomente treten auf  
 $\rightarrow$  Drehimpulse ändern sich



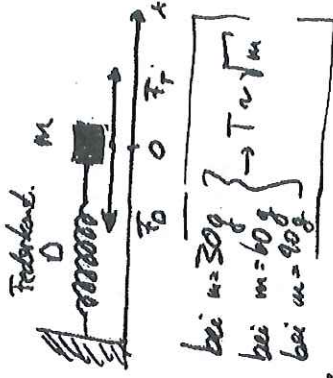
# 8 Schwingungen und Wellen

- ... haben herausragende Bedeutung in Physik und Technik!
- Physik: z.B.
  - Wellenausbreitung in Materie  $\leftrightarrow$  Mikrostruktur der Materie
  - Quantenmechanik: Teilchen als Welle, Welle als Teilchen

- Technik: z.B.
  - Resonanz bei Schwingungen  $\leftrightarrow$  Festigkeit von Maschinen, Gebäuden
  - Wellen  $\leftrightarrow$  Schall, Radio, Telefon, Licht, ...

# 8.1 Harmonische Schwingungen

- Beispiel: Federpendel



$T_0 = 6.2\text{ s}$  für 10 Schwingungen bei  $m = 30\text{ g}$   $\rightarrow T \propto \sqrt{m}$   
 $T_0 = 8.6\text{ s}$  für 10 " " bei  $m = 60\text{ g}$   
 $T_0 = 7.3\text{ s}$  für 10 " " bei  $m = 90\text{ g}$   
 ▶ Trägheitskraft  $F_T = m \ddot{x}$   
 ▶ Rückstellkraft  $F_D = -Dx$

→ 3. Newtonscher Axiom (besser: d'Alembertsches Prinzip):  $F_T = F_D$

$$m \ddot{x} = -Dx$$

$$\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$$

Schwingungsdifferentialgleichung (DGL)

Lösung: harmonische Schwingung  $\leftrightarrow$  Rückstellkraft  $\propto$  Lenker (in x)

Ansatz:  $x_A(t) = A \cos \omega t$

Amplitude  $\leftarrow$  Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$   
 $\dot{x}_A(t) = -A\omega \sin \omega t$   
 $\ddot{x}_A(t) = -A\omega^2 \cos \omega t$   
 Frequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\rightarrow \ddot{x}_A + \frac{D}{m} x_A = -A\omega^2 \cos \omega t + \frac{D}{m} A \cos \omega t \stackrel{!}{=} 0$   
 $\rightarrow \omega^2 = \frac{D}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{2\pi}{T}$

Auch  $x_B(t) = B \cdot \sin \omega_0 t$  wäre Lösung

allg. Lösung:  $\rightarrow$  Überlagerung von  $x_A(t)$  und  $x_B(t)$

$$x(t) = x_A(t) + x_B(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

Rand- / Startbedingungen

Ort:  $x(t=0) = A = x_0$

Geschw:  $\dot{x}(t=0) = -A \omega_0 \sin \omega_0 t + B \omega_0 \cos \omega_0 t$

$= B \omega_0 \stackrel{!}{=} v_0$

$\rightarrow A = x_0, B = \frac{v_0}{\omega_0}$

math. äquivalente Lösung:

$$x(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

Amplitude Phase

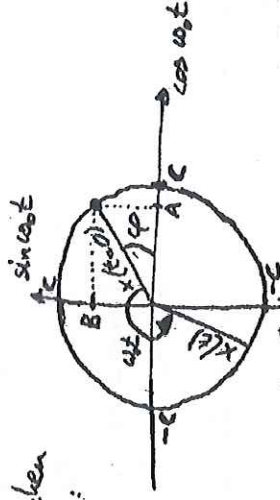
$x(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi) = C \cos \varphi \cdot \cos \omega_0 t + C \sin \varphi \cdot \sin \omega_0 t$

$\rightarrow \begin{cases} B \\ A \end{cases} = \frac{C \cdot \sin \varphi}{C \cdot \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi$

$\rightarrow A^2 + B^2 = C^2 \cos^2 \varphi + C^2 \sin^2 \varphi = C^2 \left( \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right) = C^2$

$\hookrightarrow \sqrt{A^2 + B^2} = C$

Relation zwischen den Lösungen:



harmonische Schwingung

$\leftrightarrow$  gleichförmige Kreisbewegung

Elegante (te) Lösung der Schwingungs-Dgl:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Lösungsansatz:  $z(t) = z_0 \cdot e^{\lambda t}$

$\hookrightarrow \dot{z}(t) = z_0 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t}$

$\hookrightarrow \ddot{z}(t) = z_0 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$

in  $\ddot{z} + \omega_0^2 z = z_0 \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot z_0 e^{\lambda t} \stackrel{!}{=} 0$

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

Charakterist. Polynom der Dgl

$\rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\omega_0^2} = \pm i \omega_0 \sqrt{-1} = \pm i \omega_0 \cdot i$

$\rightarrow z(t) = z_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + z_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = z_1 e^{i \omega_0 t} + z_2 e^{-i \omega_0 t}$

Euler-Formel:  $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$

mit Euler-Formel folgt:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= z_1 \cdot (\cos \omega_0 t + i \cdot \sin \omega_0 t) \\
 &\quad + z_2 \cdot (\cos \omega_0 t - i \cdot \sin \omega_0 t) \\
 &= \underbrace{(z_1 + z_2)}_{\cos \omega_0 t} + i \cdot \underbrace{(z_1 - z_2)}_{\sin \omega_0 t} \\
 &= A \cdot \cos \omega_0 t + B \cdot \sin \omega_0 t
 \end{aligned}$$

d.h. 
$$\begin{cases} A = z_1 + z_2 \\ B = i(z_1 - z_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(A - iB) \\ z_2 = \frac{1}{2}(A + iB) \end{cases}$$

Beispiel: Fadenpendel  
(hier Abbildung mit Drehmoment)

Rückstellmoment:

$$M_r = L \cdot F_T$$

$$= -L \cdot mg \sin \phi$$

Trägheitsmoment:

$$M_T = L \cdot F_T = L \cdot m \ddot{x} = L^2 \ddot{\phi}$$

$$x = L \cdot \phi \rightarrow \ddot{x} = L \ddot{\phi}$$

$$\rightarrow M_T = M_r$$

$$L^2 \ddot{\phi} = -mgL \sin \phi$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \cdot \sin \phi$$

Allg.: nicht-linear in Rückstellkraft  
→ keine harmonische Schwingung

Kleinwinkel-Näherung:  $\sin \phi = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^j \sin \phi}{d\phi^j} \cdot \frac{\phi^j}{j!}$   
(Taylor-Reihenentwicklung)

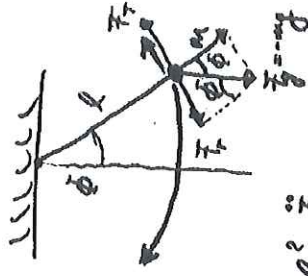
$$\rightarrow \sin \phi = \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \dots$$

→ Fadenpendel mit  $\sin \phi \approx \phi$ :

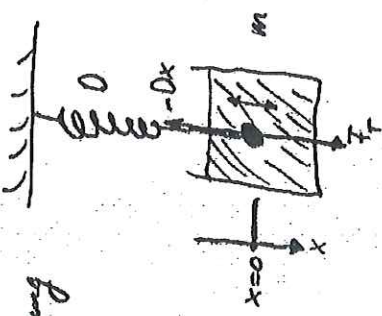
$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L} \phi = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

NB:  $\omega_0$  unabhängig von  $m$ !  
 $\omega_0$  skaliert mit  $1/\sqrt{L}$



## 8.2 Gedämpfte Schwingungen



Reibung  $\rightarrow$  Dämpfung der Schwingung

Reibungskraft, z.B.:

$$F_R = -b \cdot v = -b \dot{x}$$

Rückstellkraft

$$F_0 = -Dx$$

Trägheitskraft

$$F_T = m \ddot{x}$$

$$\rightarrow F_T = F_0 + F_R$$

$$m \ddot{x} = -Dx - b \dot{x}$$

$$\rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{D}{m} x = 0$$

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$2\gamma := \frac{b}{m}$$

$$\omega_0^2 := \frac{D}{m}$$

Lösungssatz:  $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

$$\dot{x} = \lambda x_0 e^{\lambda t} = \lambda x$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 x_0 e^{\lambda t} = \lambda^2 x$$

Charakterist. Polynom

$$\lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} \cdot \left[ x_A \cdot e^{+\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t} + x_B \cdot e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t} \right]$$

Fallunterscheidung:

• Schwache Dämpfung  $\rightarrow$  Schwingfall

$$\gamma \ll \omega_0 \rightarrow \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot i =: \omega \cdot i$$

$$=: \omega \ll \omega_0$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} \cdot \left[ x_A e^{i\omega t} + x_B e^{-i\omega t} \right]$$

$$= \dots = e^{-\gamma t} \cdot \left[ A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t \right]$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t} \cdot C \cdot \cos(\omega t + \varphi)}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\tan \varphi = -\frac{B}{A}$$

Charakterisierung der Dämpfung:

$\rightarrow$  Logarithmisches Dekrement

$$\delta := \gamma \cdot T = \ln \left( \frac{x(t)}{x(t+T)} \right)$$

$\rightarrow$  Güte (v.a. erzwungene Schwingungen  $\rightarrow$  folgt auch)

$$Q := \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

• starke Dämpfung  $\rightarrow$  Kriechfall

$\gamma \gg \omega_0$ ; Mit  $\alpha := \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \geq 0$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} \cdot [x_A \cdot e^{\alpha t} + x_B \cdot e^{-\alpha t}]$$

$$= e^{-\gamma t} \cdot \left[ (x_A + x_B) \cdot \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} + (x_A - x_B) \cdot \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2} \right]$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} \cdot [A \cdot \cosh \alpha t + B \cdot \sinh \alpha t]$$

Charakteristiken:

► kriecht langsam Gleichgewichtslage entgegen

•  $\gamma = \omega_0 \rightarrow$  aperiodischer Grenzfall

Spezialfall entartete Lösung des Charakt.

Polynoms:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$

$\rightarrow$  Dgl kann durch  $x(t) = x_0 e^{-\gamma t}$  und auch durch

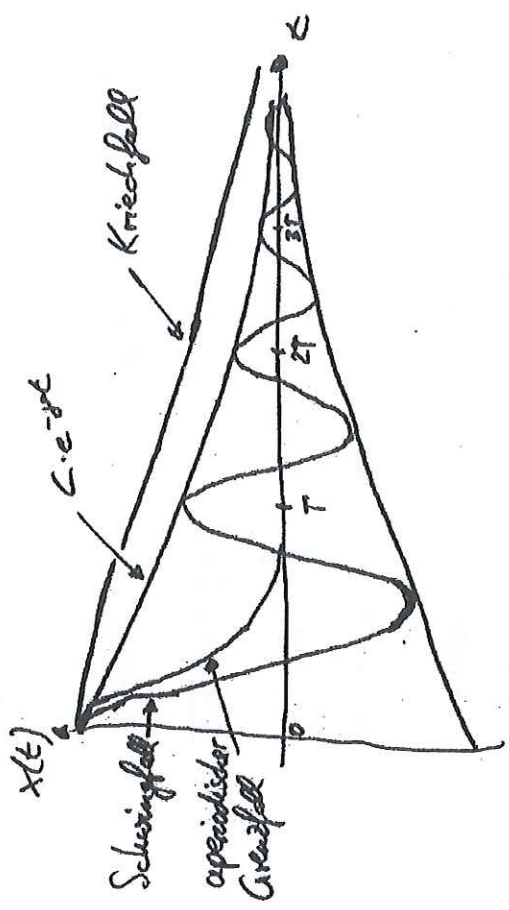
►  $\frac{dx}{dt} = c \cdot x_0 \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$  gelöst werden.

allg. Lösung:

$$x(t) = x_0 (1 + ct) \cdot e^{-\gamma t}$$

Charakteristika: - schwingt gerade eben nicht

- schnellste Annäherung an Gleichgewichtslage



• (kurze) Energiebetrachtung bei Schwingungen

► ungedämpfte Schwingungen:  $x(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$

►  $E_{kin}(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2$   
 $= \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

►  $E_{pot}(t) = \int_0^t F_0 dx' = -D \int_0^t x' dt' = \frac{1}{2} D x(t)^2$   
 $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$   
 $= \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$   
 $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$

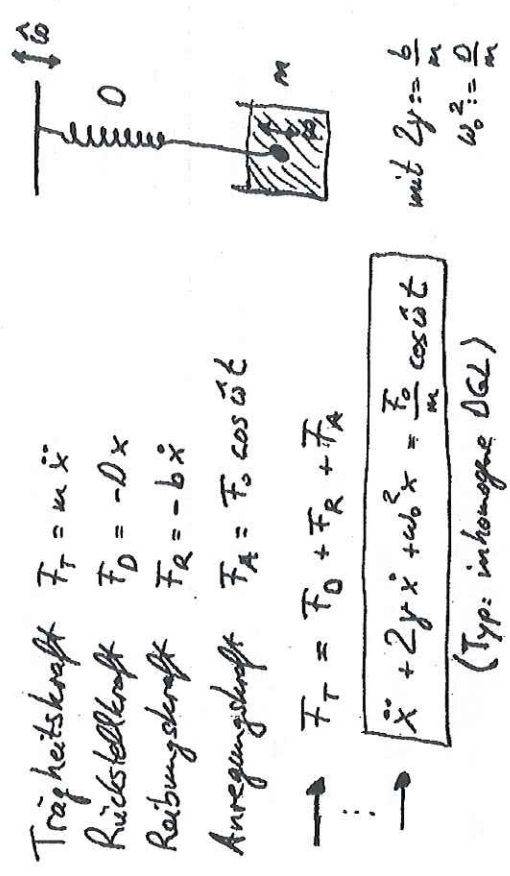
$= \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

$\rightarrow E(t) = E_{kin}(t) + E_{pot}(t)$

$= \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 (\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi))$

$\rightarrow E(t) = E_{ges} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 = \text{const}$

### 8.3 Erzwungene Schwingungen



- Trägheitskraft  $F_T = m \ddot{x}$
- Rückstellkraft  $F_D = -Dx$
- Reibungskraft  $F_R = -b\dot{x}$
- Anregungskraft  $F_A = F_0 \cos \omega t$

$$\rightarrow F_T = F_D + F_R + F_A$$

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

(Typ: inhomogene DGL)

mit  $2\gamma := \frac{b}{m}$   
 $\omega_0^2 := \frac{D}{m}$

- Lösung einer inhomogenen (linear) DGL:  
 = (allg.) Lösung der homogenen DGL  
 + (partikuläre) Lösung der inhomogenen DGL

Lösung mit komplexwertigen Ansatz:

$$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

zu (1) homogene DGL:  $\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$

Lösung: entspricht gedämpfter Schwingung (S.82)

- mittlere kinetische Energie

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_{kin}(t) dt = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{2} F_0 \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\boxed{\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2} E_{ges}}$$

- mittlere potentielle Energie

$$\overline{E_{pot}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_{pot}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (E_{ges} - E_{kin}(t)) dt$$

$$= \frac{1}{T} \cdot E_{ges} \cdot T - \frac{1}{T} \int_0^T E_{kin}(t) dt = \frac{1}{2} E_{ges}$$

$$\boxed{\overline{E_{pot}} = \frac{1}{2} E_{ges}}$$

- gedämpfte Schwingungen

$$m\ddot{x} + D\dot{x} = -b\dot{x}$$

$$\rightarrow m\ddot{x} + D\dot{x} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} D x^2 \right] = -b\dot{x} \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} [E_{kin}(t) + E_{pot}(t)] = -b\dot{x} \leq 0$$

$$\rightarrow \underline{E_{kin}(t) + E_{pot}(t) \text{ nimmt ab!}}$$

zu (2) partikuläre Lösung der inhomogenen DGL  
 z.B. für stationären Zustand

→ Ansatz  $z: z(t) = A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} = A \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}$   
 $\hookrightarrow \dot{z}(t) = i\omega A e^{i(\omega t + \varphi)} = i\omega \cdot z(t)$   
 $\ddot{z}(t) = -\omega^2 \cdot z(t)$

Eingesetzt in inhomogene DGL

$$-\omega^2 z(t) + 2\gamma i\omega z(t) + \omega_0^2 z(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$\rightarrow (-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) \cdot A e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$\rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega) \cdot A e^{i\varphi} = \frac{F_0}{m}$$

Euler-Gleichung  $\rightarrow A \cos \varphi + i A \sin \varphi = A e^{i\varphi} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$

$$A = |A e^{i\varphi}| = \sqrt{(A \cos \varphi)^2 + (A \sin \varphi)^2} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

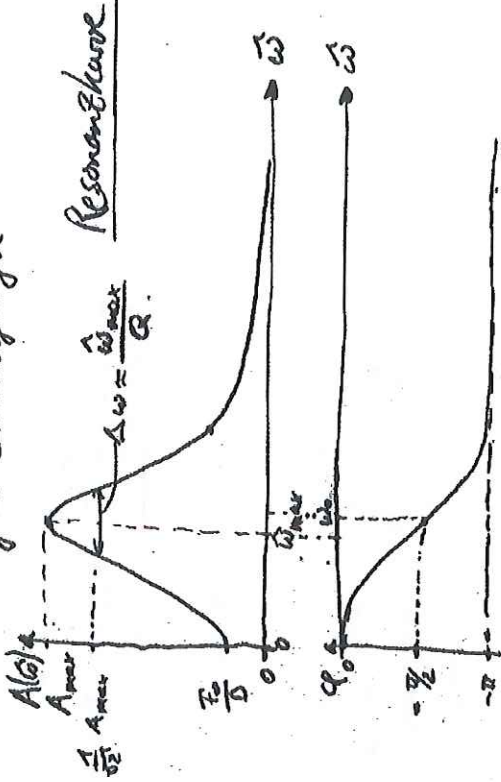
dh.:  $A = A(\omega)$

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{A \sin \varphi}{A \cos \varphi} = \frac{\operatorname{Im}(A e^{i\varphi})}{\operatorname{Re}(A e^{i\varphi})} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} A e^{i\varphi} &= \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\gamma\omega} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \cdot ((\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega) \\ &= \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \cdot ((\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot ((\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega) \end{aligned}$$

Charakteristika der stationären Lösung

Erzwungene Schwingungen



Resonanzfrequenz folgt aus Maximierung von

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$\omega_{\text{res}} = \omega_{\text{max}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Resonanzfrequenz

$\omega \leq \omega_0$   
 ungedämpfte  
 freie Schwingung

• Einschwingvorgang  $\hat{=}$  Überlagerung von

▶ gedämpfter Schwingung ( $\omega$ )

▶ Schwingung des stationären Zustands ( $\omega$ )

(NB: Einschwingvorgang erfordert Überlagerung von allg. Lösung der homogenen DGL + partikuläre Lösung der inhomogenen DGL)

## 8.4 Überlagerung von Schwingungen

Ergibt:

Superpositionsprinzip

dh. Schwingungen überlagern (addieren) sich ungestört

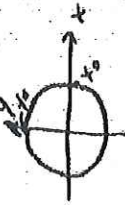
### • 2 dimensionale Überlagerung

→ Lissajous-Figuren

$$\text{allg.: } x(t) = x_0 \cos(\omega_x t + \varphi_x)$$

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_y t + \varphi_y)$$

Bd.:  $\omega_x = \omega_y$ ,  $x_0 = y_0$ ,  $\varphi_x = 0^\circ$ ,  $\varphi_y = 90^\circ$



### • 1 dimensionale Überlagerung

$$x_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \rightarrow z_1(t) = C_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)}$$

$$x_2(t) = C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \rightarrow z_2(t) = C_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \rightarrow z(t) = \text{Re}(z(t)) = \text{Re}(z_1(t) + z_2(t))$$

= ... (Additionstheoreme von Sin, Cos)

= ... (Multiplikation von Exponentialfunktionen)

= ...

Beispiele für Überlagerung von Schwingungen:

$$\omega_1 = \omega_2 =: \omega$$

$$z(t) = C_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + C_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

$$= C_1 e^{i\omega t} e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\omega t} e^{i\varphi_2}$$

$$= (C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2}) \cdot e^{i\omega t}$$

$$= C \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}$$

$$C = \sqrt{(C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2}) \cdot (C_1 e^{-i\varphi_1} + C_2 e^{-i\varphi_2})}$$

$$= \dots = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 (e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)})}$$

Euler-Formel:  
 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$   
 $\rightarrow e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} = 2 \cos \varphi$   
 $e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = 2 \sin \varphi$

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\tan \varphi = \frac{C \cdot \sin \varphi}{C \cdot \cos \varphi} = \frac{\text{Im}(C \cdot e^{i\varphi})}{\text{Re}(C \cdot e^{i\varphi})} = \frac{\text{Im}(C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2})}{\text{Re}(C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2})}$$

$$\rightarrow \tan \varphi = \frac{C_1 \sin \varphi_1 + C_2 \sin \varphi_2}{C_1 \cos \varphi_1 + C_2 \cos \varphi_2}$$

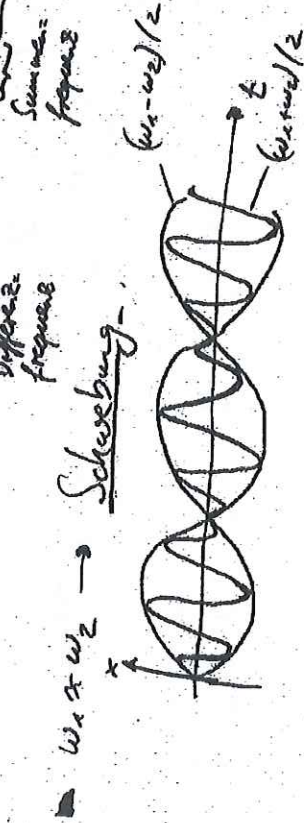


$C_1 = C_2 = iC$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , aber  $\omega_1 \neq \omega_2$   
 $x(t) = C \cos \omega_1 t + C \cos \omega_2 t$

$= C \cdot \cos \left[ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right]$   
 $+ C \cdot \cos \left[ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right]$

$= \textcircled{\otimes} = 2 \cdot C \cdot \cos \left[ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right] \cdot \cos \left[ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right]$

Differenzfrequenz



$\textcircled{\otimes} C \cdot \cos \left[ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right] + C \cdot \cos \left[ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right]$   
 $= C \cdot \left[ \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) - \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot \sin \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \right]$   
 $+ C \cdot \left[ \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) + \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot \sin \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \right]$   
 $= 2 \cdot C \cdot \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right)$

Fourier-Synthese, Fourier-Analyse

- komplizierte Schwingungen können durch Überlagerung harmonischer Schwingungen synthetisiert werden:

Fourier-Synthese

$x(t) = x_0 + x_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + x_2 \cos(2\omega t + \varphi_2)$   
 $+ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$



$x(t) = \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots$

- Zerlegung komplizierter Schwingungen in harmonische Schwingungen

Fourier-Analyse

$a_n + i b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] dt$

$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(\omega t) dt$

Fourier-Analyse

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot e^{i n \omega t}$

Fourier-Synthese

## 8.5 gekoppelte Schwingungen

Trägheitskräfte:

$$F_{T1} = m \ddot{x}_1, \quad F_{T2} = m \ddot{x}_2$$

Rückstellkräfte:

$$F_{D1} = -Dx_1 - D^*x_2 = -Dx_1 + D^*(x_2 - x_1)$$

$$F_{D2} = \dots = -Dx_2 + D^*(x_1 - x_2) = -Dx_2 - D^*(x_2 - x_1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} F_{T1} = F_{D1} \rightarrow m \ddot{x}_1 + (D+0^*)x_1 - 0^*x_2 = 0 \\ F_{T2} = F_{D2} \rightarrow m \ddot{x}_2 - 0^*x_1 + (D+0^*)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} m \ddot{x}_1 \\ m \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (D+0^*) & -0^* \\ -0^* & (D+0^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gekoppeltes lineares DGL-System

komplexwertiger Lösungsansatz:  $w$  ist zu bestimmen

$$x_1(t) = X_1 e^{i\omega t}, \quad x_2(t) = X_2 e^{i\omega t}$$

$$\text{einsetzen in } \left. \begin{aligned} & -\omega^2 m X_1 + (D+0^*)X_1 - 0^*X_2 = 0 \\ & -\omega^2 m X_2 - 0^*X_1 + (D+0^*)X_2 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -\omega^2 m + (D+0^*) & -0^* \\ -0^* & -\omega^2 m + (D+0^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

homogenes lineares Gleichungssystem für Amplituden  $X_1$  und  $X_2$

Lösung für beliebige  $X_1$  und  $X_2$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -m\omega^2 + D + 0^* & -0^* \\ -0^* & -m\omega^2 + D + 0^* \end{pmatrix} = 0$$

(Determinante der Matrix)

$$\Leftrightarrow (-m\omega^2 + D + 0^*)^2 - (-0^*)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -m\omega^2 + D + 0^* = \pm 0^*$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D+2D^*}{m}}}$$

Eigenfrequenzen des gekoppelten Schwingungssystems

$$\omega_1: \text{Grenzfrequenz} \quad (0^* \text{ trägt nicht bei})$$

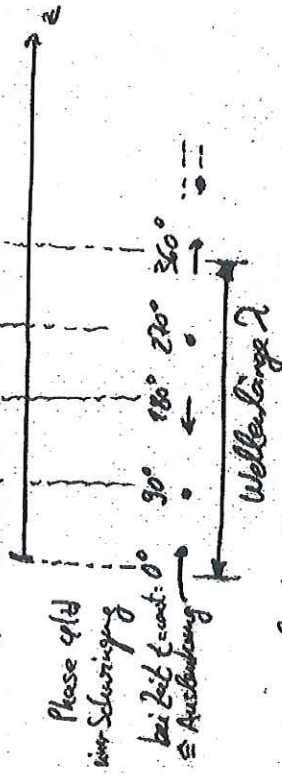
$$\omega_2: \text{Grenzfrequenz} \quad (0^* \text{ trägt maximal bei})$$

## 8.6 Wellen

Betrachte gekoppelte (quidistante) Oszillatoren

mit  $D = D^*$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) ...  
 $D \quad D \quad D \quad D \quad D \quad D \quad D$   
 Harmonisch gekoppelte Oszillatoren



Beobachtung: Schwüingung von (1) breitet sich auf (2) aus  
 ... von (2) ... von (3) aus

d.h. Energitransport von (1)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  ...  
 Schwüingungsbestand eines einzelnen Oszillators  
 hängt von Zeit  $t$  und dem Ort  $z$  ab:

$$Y(z,t) = A \cos(\omega t - kz) \quad \text{ortsb. Phase } \phi(z)$$

$$Y(z,t) = C \cdot e^{i(\omega t - kz)}$$

$Y(z,t)$  beschreibt eine Welle

Welle: im Raum und Zeit periodische  
 Ausbreitung eines Schwüingungs-  
 Zustands mit Energietransport,  
 ohne Massentransport

$k := \frac{2\pi}{\lambda}$  Wellenzahl, i.A. ein Vektor in  
 Ausbreitungsrichtung der Welle

$\lambda$ : Wellenlänge

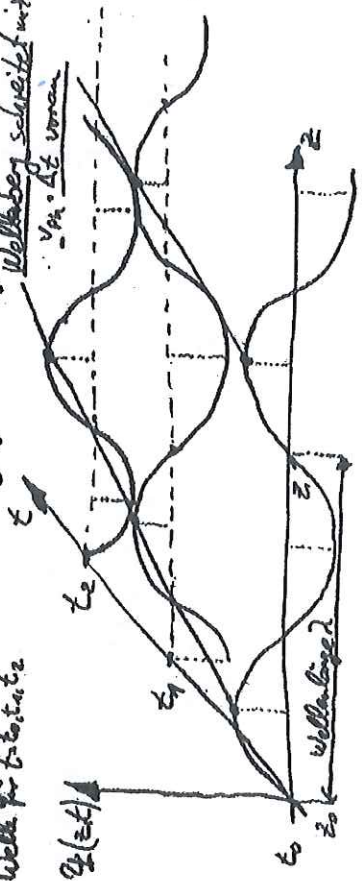
## 8.6.1 Harmonische Wellen (vgl. 8.1)

$$Y(z,t) = A \cdot \cos(\omega t - kz) = A \cdot \cos[\omega \cdot (t - \frac{k}{\omega} \cdot z)]$$

$\rightarrow \frac{\omega}{k}$  entspricht einer Geschwindigkeit

Phasengeschwindigkeit  $v_{Ph} := \frac{\omega}{k} = f \cdot \lambda$

$\hat{=}$  Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle  
 Kompositionen der Welle für  $t_0, t_1, t_2$   
 Wellenberg schreitet mit  $v_{Ph} \cdot \Delta t$  voran



## Reflexion; stehende Welle

- Wellen werden reflektiert, je nachdem wie die Wellenfunktion abgeschlossen ist:

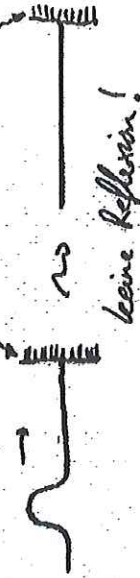
► offenes oder freies Ende



► geschlossenes oder festes Ende



► geeignet gedämpft für Abschluss



- Hin- und zurücklaufende und reflektierte Welle überlagern bei geeigneter Frequenz zu stehender Welle



z.B.

Wellenknoten und -bäuche ortsfest!

## 8.6.2 Wellengleichung (d'Alembert Gleichung)

$$y(z, t) = A \cdot \cos(\omega t - k z)$$

- Welle  $\hat{=}$  Schwingung in Zeitkoordinate  $t \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \omega^2 y = 0$
- Welle  $\hat{=}$  ... in Ortskoordinate  $z \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + k^2 y = 0$

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -y = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Wellengleichung

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) y = 0 \rightarrow \square^2 y = 0$$

NB:

$\square^2 :=$  d'Alembert Operator

$$\text{allg.} \quad \square^2 := \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

### 8.6.3 Wellentypen

- Ebene Wellen

z.B.  $\vec{k} = k\vec{z}$

$$\psi(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = A \cdot \cos(\omega t - kz)$$

- Ausbreitungsrichtung in  $\vec{r}$ -Richtung
- Auslenkung der Welle (Elongation):



- Longitudinale Wellen " $\psi \parallel \vec{z}$ " (z.B. Schallwellen)
- transversale Welle " $\psi \perp \vec{z}$ "

transversale polarisierte Wellen

- lineare Polarisation  $\psi \parallel x$  oder  $\psi \parallel y$
- zirkulare  $\psi(\vec{r}, t)$
- elliptische  $\psi(\vec{r}, t)$

- Kugelwellen (auch: Elementarwellen)

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr) \text{ mit } r = |\vec{r}|$$

(Im Abstand  $r$  von Quelle ist Gesamtenergie auf Kugeloberfläche  $4\pi r^2$  verteilt  $\rightarrow$  Intensität der Welle  $\propto$  Energie  $\propto \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 \rightarrow 4\pi r^2 \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = \text{const.}$ )

### Beispiele für Wellen in Medien

Es gilt immer:  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

- elastische Longitudinalwelle (in festen Körpern)

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} ; E: \text{Elastizitätsmodul} ; \rho = \frac{m}{V}: \text{Dichte}$$

- Transversalwelle einer Saite

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad F: \text{mech. Spannung bzw. Spannung der Saite} ; \mu = \frac{m}{L}: \text{lineare Massendichte}$$

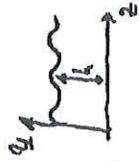
- Schallwellen in Gasen

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P}{\rho}} \quad P: \text{Gasdruck} ; \rho: \text{Dichte} ; \gamma: \text{Adiabatenkoeffizient (} \gamma = 1.4 \text{ für Luft)}$$

- Wasserwellen (Oberflächenwellen)

$$v_{ph} = \sqrt{\left(\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot \sigma}{S \cdot \lambda}\right) \cdot \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{S}\right) \cdot \tanh(kh)} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

h: Wassertiefe,  $\sigma$ : Oberflächenspannung



NB:  $v_{ph} = v_{ph}(\lambda) = v_{ph}(k) \rightarrow$  Dispersion

Näherungen:

► untiefe Flüssigkeiten (Flachwasserwelle)  
 $v_{ph} = \sqrt{g \cdot h}$  für  $h \ll \lambda$ , keine Dispersion

► tiefe Flüssigkeiten

$v_{ph} = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}}$  für  $h \gg \lambda$ , normale Dispersion  
 ( $v_{ph} \sim \sqrt{\lambda}$ )

► Kapillarwellen

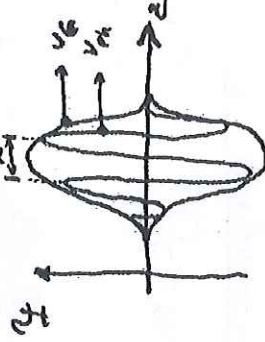
$v_{ph} = \sqrt{\frac{2\pi \sigma}{\rho \lambda}} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}}$  für  $\lambda \ll h$  und  $\lambda \ll \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$   
 anomale Dispersion  
 ( $v_{ph} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ )

### 8.6.4 Dispersion, Gruppengeschwindigkeit

Falls Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}$  von Wellenlänge abhängig  $\rightarrow$  Dispersion

und  $v_{ph} = v_{ph}(\lambda) = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \cdot \lambda}{2\pi}$  Dispersion  
 Relation

Dispersion hat insbesondere Auswirkungen auf Aufbreitungsgeschwindigkeit von Wellengruppen  
 (= impulsartige lokale Störung)



Wellengruppe: Überlagerung  
 unendlich vieler harmonischer Wellen mit Frequenzen  
 $\omega_m - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_m + \frac{\Delta\omega}{2}$   
 $\omega_m$ : Mittelfrequenz  
 $\Delta\omega$ : Frequenzintervallbreite  
 $\rightarrow$  kontinuierliche Fouriersumme

Wellengruppe (d.h. Einhüllende) breitet sich mit Gruppengeschwindigkeit  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  aus!

Mit  $v_{ph} = \frac{\omega}{k} \rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = d(v_{ph} \cdot k)$

$v_g = v_{ph} + k \cdot \frac{dv_{ph}}{dk} = v_{ph} \cdot \left(1 + k \cdot \frac{dv_{ph}}{v_{ph} dk}\right)$   
 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

- $\frac{dv_{ph}}{d\lambda} = 0 \rightarrow$  keine Dispersion
- $v_g < v_{ph} \rightarrow$  normale Dispersion
- $v_g > v_{ph} \rightarrow$  anomale Dispersion

## 8.6.5 Interferenz, Kohärenz

- Linearität der Wellengleichung

### ■ Superpositionsprinzip

Wellen überlagern sich, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Die resultierende Amplitude  $A(\vec{r}, t)$  am Ort  $\vec{r}$  und Zeit  $t$  ist die Summe der Einzelamplituden  $A_i(\vec{r}, t)$  gegeben:

$$A(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N A_i(\vec{r}, t)$$

- (räumliche) Kohärenz: sich überlagernde Wellen haben eine zeitlich konstante Phasendifferenz  $\delta\varphi(\vec{r})$

→ Wellen haben gleiche Frequenz

- Interferenz: Überlagerung kohärenter Wellen führt zu Verstärkung (konstruktive Interferenz) und Auslöschung (destruktive —) in bestimmten Raumbereichen der Überlagerung  
→ Interferenzbilder

NB: stehende Welle ist Spezialfall der Interferenz

## 8.6.6 Huygenssches Prinzip, Beugung

### ■ Huygenssches Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfläche ist

Ausgangspunkt einer Elementarwelle

Gesamtwellen = Überlagerung aller dieser Wellen

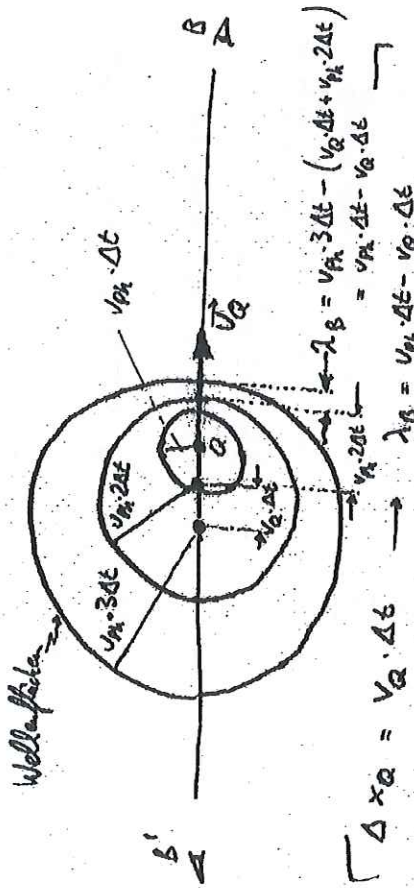


→ Phänomene der Beugung von Wellen  
z.B. Beugung an Spalt



### 8.6.7 Doppler-Effekt

Messbare Frequenz einer Welle hängt von Relativgeschwindigkeit Quelle - Empfänger ab

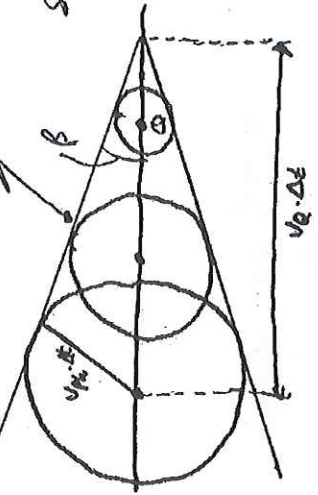


$\Delta x_Q = v_Q \cdot \Delta t \rightarrow \lambda_B = v_Q \cdot \Delta t - (v_Q \cdot \Delta t + v_Q \cdot 2\Delta t)$   
 $\rightarrow \lambda_B = v_Q \cdot \Delta t - v_Q \cdot \Delta t - v_Q \cdot \Delta t = v_Q \cdot \Delta t - v_Q \cdot \Delta t$   
 $\rightarrow \lambda_B = v_Q \cdot \Delta t - v_Q \cdot \Delta t$   
 mit  $\Delta t = T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{v_Q}$   
 $\rightarrow \lambda_B = \lambda - \frac{v_Q}{c} \cdot \lambda = \lambda \cdot \left(1 - \frac{v_Q}{c}\right)$   
 für  $\lambda_{B'}$  Überlegung und Rechnung analog

Quelle Q in Ruhe: Wellenlänge  $\lambda$ , Frequenz  $f = \frac{v_Q}{\lambda}$   
 Beobachter B:  $\lambda_B = \lambda \cdot \left(1 - \frac{v_Q}{v_{Ph}}\right) < \lambda$

$f_B = \frac{f}{1 - \frac{v_Q}{v_{Ph}}} > f$   
 Beobachter B':  $\lambda_{B'} = \lambda \cdot \left(1 + \frac{v_Q}{v_{Ph}}\right) > \lambda$   
 $f_{B'} = \frac{f}{1 + \frac{v_Q}{v_{Ph}}} < f$

Falls  $v_Q > v_{Ph} \rightarrow$  Machsche Kegel mit Stoßfront



$\sin \beta = \frac{v_{Ph} \cdot \Delta t}{v_Q \cdot \Delta t} = \frac{v_{Ph}}{v_Q} =: \frac{1}{M}$

M: Machzahl

### 8.6.8 Energiedichte einer kugelwellenart

vgl. Energiebetrachtung zu Schwingungen!

ein Oszillator:  $E_{ges} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$   
 viele Oszillatoren:  $E_{ges} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot \omega^2 A^2$   
 ( $\rho = \frac{\sum m_i}{V}$ )

$$S_E = \frac{E_{ges}}{V} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$
 Energiedichte

Intensität (Energieflussdichte): Energie pro Zeiteinheit durch Fläche  $\perp$  Ausbreitung

$$I = v_{Ph} \cdot S_E = \frac{1}{2} v_{Ph} \cdot \rho \omega^2 A^2$$

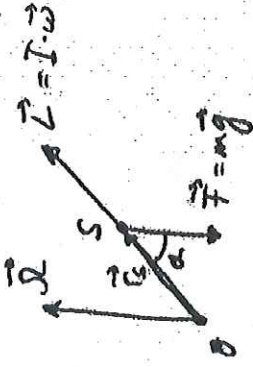
NB: Interferenz: Nach Addition der Amplitudenquadrate für Intensität (no "gemischte Terme" wie in binomischer Formel)



Kreisel mit äußeren Drehmoment

z.B.  $\vec{D}$  durch Schwerkraft, falls Kreisel nicht im Schwerpunkt S unterstützt:

→ Drehimpuls  $\vec{L} \neq \text{const}$ , aber  $L = |\vec{L}| = I \cdot \omega = \text{const.}$



Drehmoment  $\vec{D} = \vec{r}_S \times \vec{F} = \vec{r}_S \times m\vec{g}$

→ Richtung von  $\vec{D} \perp \vec{r}_S \perp \vec{F}$  - Ebene

→  $\vec{D} \perp \vec{L} \rightarrow \vec{L}$  rotiert um  $\vec{D}$ : Präzession

$\vec{D} = \vec{L} \dot{\phi} = \vec{r}_S \times \vec{F} = r_S \left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right) \times \vec{F} = \frac{r_S F}{L} \left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)$

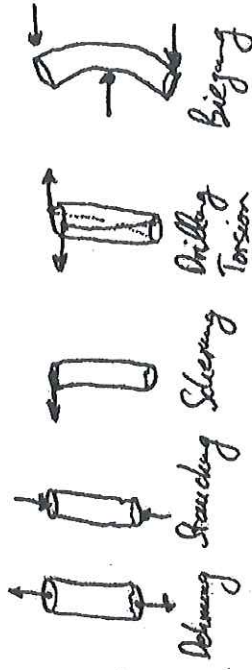
→  $\left| \Omega = \left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = \frac{r_S F}{L} = \frac{r_S \cdot m g}{I \cdot \omega} \right.$  Präzessionsfrequenz

$\left[ \dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{L} + \vec{L}_{LE}) = \frac{d\vec{L}}{dt} + \frac{d\vec{L}_{LE}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_{LE} \right]$   
 Zerlege  $\vec{L} = \vec{L}_{||} + \vec{L}_{\perp}$   
 $\rightarrow \vec{L}_{LE} = - \left( \frac{r_S F}{L} \right) \cdot \left[ \vec{L}_{||} \dot{\phi} - \vec{L}_{\perp} \dot{\phi} \right]$

→  $\vec{L}_{LE} + \left( \frac{r_S F}{L} \right) \vec{L}_{LE} = 0$  entspricht Schwingungsdauer →  $\Omega = \left( \frac{r_S F}{L} \right)$

10 Mechanik deformierbarer Medien

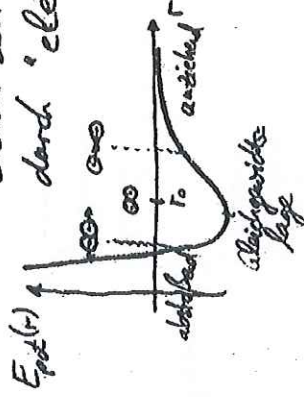
Grundtypen der Deformation:



10.1 Das Elastizitätsmodell, Hookesches Gesetz

Mikroskopisch: Atomen/Moleküle

ziehen sich an/stoßen sich ab durch "elektrostatistische" Kräfte



Minimum des Potentials  $E_{pot}$  ist röhrenweise parabol-förmig:  $E_{pot}(r) = \frac{D}{2} (r_0 - r)^2 + \text{const}$

$\vec{F} = -\text{grad } E_{pot} \rightarrow F(r) = D \cdot (r_0 - r) = D \cdot \Delta r$   
entspricht Federkraft!

→ Deformation von Körpern mit makroskop. Größen



$$F = D \cdot \Delta L$$

makroskop. Eigenschaften der Federkonstante D:

- ▶  $D \sim A$
- ▶  $D \sim \frac{1}{L}$

$$F = D \cdot \Delta L = A \cdot \frac{D \cdot L}{A} \cdot \frac{\Delta L}{L} =: \frac{A \cdot E}{L} \cdot \Delta L$$

→ Hookesches Gesetz

=: Elastizitätsformel  
 $E, [E] = N/m^2$

Mit mechanischer (Zug-/Druck-)Spannung  $\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}}{A}$

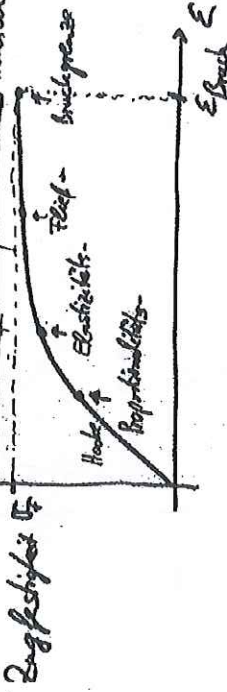
und relativer Dehnung:  $\epsilon =: \frac{\Delta L}{L}$

→  $\sigma = E \cdot \epsilon$  Hookesches Gesetz

Material	$E [10^3 \frac{N}{m^2}]$	$\epsilon_{Bruch}$
Aluminium	72	0.5
V2A-Stahl	195	0.45
Kupfer (kalt gezogen)	126	0.02
Quarzglas	76	...

NB: Zu große Dehnung  
 ↳ Abweichungen um parabelförmiges Potential  
 ↳ nicht-lineares Kraftgesetz

⇒ (vermeintlich) Dehnungs-Spannungsdiagramm  
 $\sigma$  ↑ elastisches ↑ plastisches Verhalten  
 Zugfestigkeit  $\sigma_F$



NB: Nach plastischer Verformung bleibt Restdeformation  $\epsilon_R \neq 0$

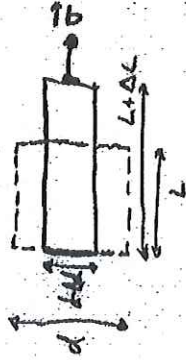
## 10.2 Querkontraktion, Poissonzahl

- Unter Dehnung kontrahiert Körper in Querrichtung:

Querkontraktion

beschrieben durch

$$\mu := - \frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L}} \quad \text{Poisson-Zahl}$$



→ Volumenänderung durch Zugspannung  $\sigma$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta d}{d} = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu)$$

$$\begin{aligned} V &= L \cdot d^2 \rightarrow \Delta V = d^2 \Delta L + L \cdot 2d \cdot \Delta d \\ \rightarrow \frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta L}{L} - 2\mu \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{L} (1 - 2\mu) = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu) \end{aligned}$$

## 10.3 Kompressibilität, Kompressionsmodell

- Unter allseitigen Druck  $\Delta p = -\sigma$  folgt

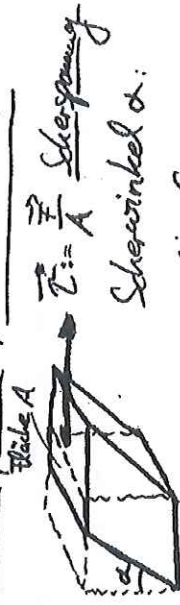
$$\frac{\Delta V}{V} = - \frac{3 \Delta p}{E} (1 - 2\mu) = -\kappa \cdot \Delta p$$

$$\begin{aligned} \kappa &:= \frac{3}{E} (1 - 2\mu) \quad \text{Kompressibilität} \\ K &:= - \frac{\Delta p}{\Delta V} \cdot V = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} = \frac{1}{\kappa} \quad \text{Kompressionsmodell} \end{aligned}$$

[Körper in allen drei Richtungen gleichmäßig durch Druck  $\Delta p$  gestaucht, Querkontraktion wird durch sich Strömung und vergrößert Volumen] [anwend.]

## 10.4 Schub-/Scher-/Torsionswinkel

Scherung:



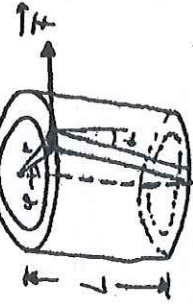
Schubwinkel  $\alpha$ :

$$\tau = G \cdot \alpha$$

Schubmodul G (auch: Schermodul)

$$\tau = G \cdot \alpha = G \cdot \frac{r \cdot \varphi}{L}$$

(auch: Torsionsmodul)

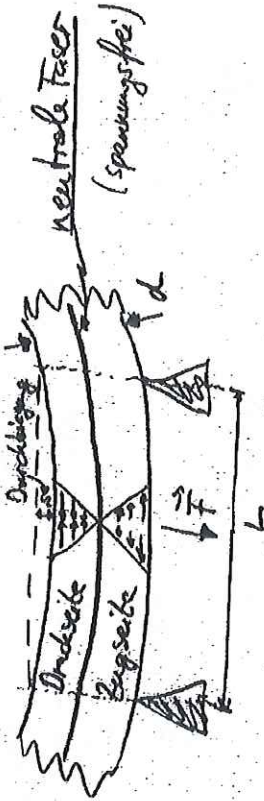


Torsion:

Schub-/Scher-/Torsionsmodell:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{3K}{2} \cdot \frac{1 - 2\mu}{1 + \mu}$$

## 10.5 Biegung eines Balkens



aus Differentialgeometrie folgt Ergebnis für Durchbiegung eines Balkens mit Querschnitt  $b \cdot d$

$$s_{max} = \frac{1}{4E} \cdot \frac{L^3}{d^3 \cdot b} \cdot F \sim \frac{L^3}{d^3}$$

Größe der Durchbiegung hängt ab von:

- Art der Einspannung: einseitig ; zweiseitig
- Art der Last: Punktlast ; Linienlast
- Profil des Balkens: Fläche neutrale Faser

charakterisiert durch

Fläche Trägheitsmoment:  $J_y = \int y^2 dA = \iint y^2 dx dy$

z.B. rechteckiger Querschnitt:  $J_y = \frac{1}{12} b d^3$

→  $s_{max} = \frac{1}{48E} \cdot \frac{L^3}{J_y} \cdot F = \frac{1}{48E} \cdot \frac{L^3}{d^3} \cdot F$

für obiges Beispiel

## 11 Hydrostatik

- deformierbare Körper: Atome/Moleküle  $\therefore$  w. ortsfest und nur geringfügig verschiebbar, starke Zusammenh. halt
- Flüssigkeit: Atome/Moleküle frei verschiebbar, aber zusammenhängend
- Gase: Atome/Moleküle frei verschiebbar und ohne starken Zusammenhalt (Zusammenhalt  $\approx$  Kräfte zw. Atoma/Moleküle)

Ideale Flüssigkeit: keine Reibungskräfte

keine Oberflächeneffekte

→ Scherkräfte werden sofort ausgeglichen

→ Schubmodul  $G=0$  für ideale Flüssigkeit



→ Flüssigkeitsoberfläche immer senkrecht zur einwirkenden Normalkraft  $F_n$

# 11.1 Druck und Auftrieb

## • Druck

$$p := \frac{F}{A}$$

mit  $F = |\vec{F}|$

Einheit:  $1 \frac{N}{m^2} = 1 Pa \approx 10^{-5} bar$

- Kraft  $F$  auf Fläche  $A$  eines abgeschlossenen Flüssigkeitsvolumens
- Kraft  $F$  von abgeschlossenen Flüssigkeitsvolumen auf Fläche  $A$  innerhalb der Flüssigkeit

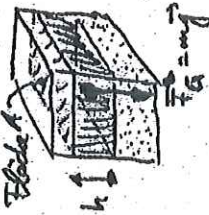
► ruhendes Volumenelement erfährt Gesamtkraft Null

→ Druck in Flüssigkeit überall gleich (falls keine Schwerkraft)

Anwendung: hydraulische Presse

$$\frac{F_1}{A_1} = p = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

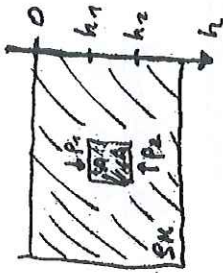
• Schwerkraft ruft Schweredruck hervor



$$F_G = mg = \rho V \cdot g = \rho \cdot A \cdot h \cdot g$$

$$p = \frac{F_G}{A} = \rho \cdot h \cdot g$$

## • Auftrieb



$$p = p(h) = \rho \cdot h \cdot g$$

→ Druckdifferenz (oben-unten)

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho(h_2) - \rho(h_1) = \rho \cdot h_2 \cdot g - \rho \cdot h_1 \cdot g$$

$$\Delta p = \rho \cdot h \cdot g \quad (h_2 - h_1)$$

Fläche  $A$  des Körpers:  $F = \Delta p \cdot A = \rho \cdot h \cdot g \cdot A$   
 $= \rho \cdot h \cdot g \cdot A \cdot (h_2 - h_1)$

$$F_A = \rho \cdot h \cdot g \cdot V_{\text{verdrängtes Medium}} = \rho \cdot h \cdot g \cdot V_{\text{Körpers}} = \rho \cdot h \cdot g \cdot V_{\text{verdrängtes Medium}}$$

Auftriebskraft

- ⇒ Sinken  $F_G > F_A = \rho \cdot h \cdot g \cdot V_{\text{verdrängtes Medium}}$
- Schwimmen  $F_G < F_A$
- Schweben  $F_G = F_A$

## 11.2 Kompressibilität (vgl. 10.3)

Volumenänderung unter allseitigen Druck

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K} \cdot \Delta p = -\kappa \cdot \Delta p$$

Kompressionsmodul Kompressibilität

NB: für Gase wie Luft: Schweredruck + Kompressibilität  $\rightarrow \rho = \rho(h) \rightarrow$  beruht auf Höhenformel

### 11.3 Grenzflächen: fest-flüssig-gasförmig-

- Atome/Moleküle in Festkörper / Flüssigkeit / Gas ziehen sich mehr oder weniger stark an typ. Festkörper, Flüssigkeit, typ. Gas

→ Kohäsionskräfte (zwischen gleichartige Körpern)

- An Grenzflächen können diese Kräfte sichtbar werden



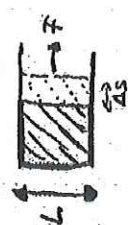
Heranziehen eines Atoms/Moleküls aus Flüssigkeitsoberfläche erfordert Arbeit ( $\int F dx$ )

→ Arbeit  $\Delta W$  zur Vergrößerung der Grenzfläche  $\Delta A$  zwischen Flüssigkeit und Gas:

$$\epsilon := \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

spezifische Oberflächenenergie

$$\Delta W = F \cdot \Delta s \quad \left. \begin{array}{l} \Delta W = F \cdot \Delta s \\ \Delta A = L \cdot \Delta s \end{array} \right\} \epsilon = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \cdot \Delta s}{L \cdot \Delta s} = \frac{F}{L} = \sigma$$



e.B.  $\sigma_{H_2O} = 0.073 \frac{J}{m^2}$   $\left( \frac{N}{m} \right)$   
 $\sigma_{Hg} = 0.471 \frac{J}{m^2}$

### z.B. Seifenblase:

- Druckkraft:  $F = \Delta p \cdot A = \Delta p \cdot 4\pi r^2$
- Energiegewinn aus Oberflächenvergrößerung:  $\Delta W = F \cdot \Delta r$



$$\Delta W = 2 \cdot \epsilon \cdot \Delta A = 2 \epsilon \cdot 4\pi r \cdot \Delta r$$

Seifenfilm hat 2 Oberflächen!

$$F \cdot \Delta r = \Delta p \cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta r \stackrel{!}{=} 2 \epsilon \cdot 4\pi r \Delta r = 2 \epsilon \cdot 8\pi r \Delta r$$

$$\Delta p = \frac{4 \epsilon}{r} = \frac{4 \sigma}{r} \sim \frac{1}{r}$$

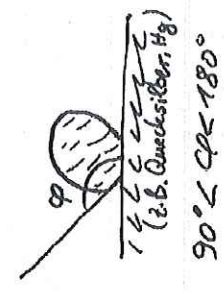
NB: Analog folgt Druck in Flüssigkeitstropfen zu  $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$ , da nur 1 Oberfläche

### Grenzflächenkräfte

- Kohäsion: Zwischen gleichartige Atome/Moleküle
- Adhäsion: — — — verschiedene Artige — — —

### Grenzflächenverhalten

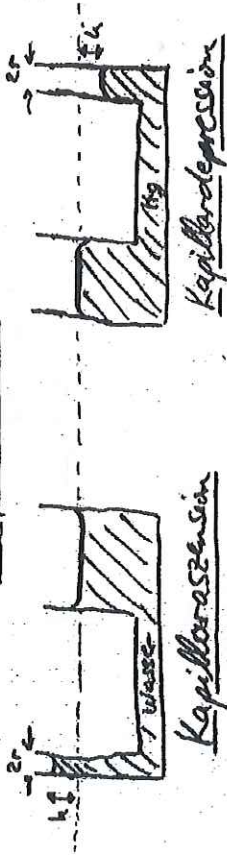
- Benetzend (Adhäsion > Kohäsion)
- nicht-benetzend (Adhäsion < Kohäsion)



Benetzungswinkel:  $0 < \varphi < 90^\circ$

$90^\circ < \varphi < 180^\circ$

## ⇒ Kapillarität



Steighöhe: Oberflächenspannung an Randlinie:  $F_g = \sigma \cdot 2 \cdot l$   
 Gewichtskraft der Flüssigkeitssäule:  $F_g = m \cdot g = \rho \cdot g \cdot h \cdot \pi r^2$

$F_g \cdot \cos \varphi = F_g$

Randwinkel abhängig von Benetzung

$\sigma \cdot 2 \pi r \cdot \cos \varphi = \rho \cdot g \cdot h \cdot \pi r^2$

$$h = \frac{2 \sigma \cdot \cos \varphi}{\rho \cdot g \cdot r}$$

vollständig benetzt  $\varphi = 0^\circ$        $\frac{2\sigma}{\rho g r}$

vereinfacht: Oberflächenspannung versucht Kontaktfläche zu verkleinern (Minimalflächen)

→ Gleichgewicht:  $\sigma_{12} + \sigma_{23} \cdot \cos \varphi - \sigma_{13} = 0$   
 (der Oberflächenspannung) →  $\cos \varphi = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}}$

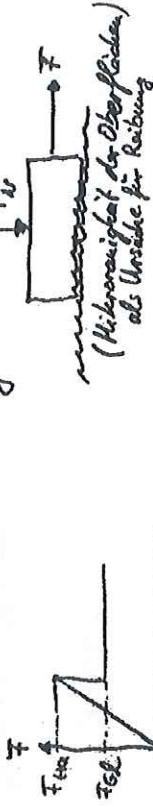
NB:  $\sigma_{13} > \sigma_{12}$  Haftspannung  
 •  $\sigma_{12}$  kann negativ sein bei Benetzung an Grenzfläche 1/2

$0^\circ < \varphi < 90^\circ$ : benetzend  
 $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ : nicht-benetzend

## 11.4 Reibung an Grenzfläche

Grenzflächenkräfte treten auch zwischen Festkörpern auf  
 • Coulomb-Reibung (oder trockene Reibung)

### Haft- und Gleitreibung



Körper haftet →  $F < F_{Ha}$   
 Körper gleitet →  $F = F_{Gl}$

$$\begin{aligned} F_{Ha} &= \mu_H \cdot F_N \\ F_{Gl} &= \mu_G \cdot F_N \end{aligned}$$

Haft-/Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_H / \mu_G$ ;  $F_N$ : Normalkraft zur Kraft zur Oberfläche  
 i.A.  $\mu_H > \mu_G$

NB: (lineare) Reibung ist unabhängig von Größe der Berührungsfäche

### Rollreibung

$$D_R = R \cdot F_R = \mu_R \cdot F_N$$

Rollreibungskoeffizient,  $[ \mu_R ] = m$

- typ. Werte für Reibungskoeffizienten
  - Stahl auf Stahl  $\mu_H = 0.5 - 0.8$ ;  $\mu_G = 0.4$ ;  $\frac{\mu_H}{\mu_G} = 0.05$
  - Gummi auf Asphalt (modern) 1.2
  - ... 1.05
  - ... (mess) 0.6
  - ... 0.4

Arbeits bei Reibung 

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int F_{\text{Reib}} ds = \int \mu_k \cdot F_N ds = \mu_k \cdot m \cdot g \cdot s$$

→  $W \sim v$ ,  $W \sim F_N$

Stokes-Reibung (oder: viskose Reibung)

NB: nicht zu große Körper, nicht zu schnell bewegt  
z.B.: Kugel, Radius  $R$  im Fluid mit Viskosität  $\eta$

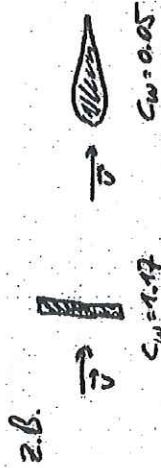
$$F_{\text{Stokes}} = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad \leftarrow \text{Geschwindigkeit}$$

Newton-Reibung

NB: schnellere Bewegung großer Körper durch Fluid

$$F_{\text{Newton}} = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \quad \rightarrow F_{\text{Newton}} \sim v^2$$

Widerstandsbeiwert  $c_w$  ist abhängig von Form des Körpers



## 12 Hydro-/Aerodynamik

... beschreibt Strömungen von Fluiden

Charakterisierung:

▶ Strömungsfeld mit Stromlinien

▶ Strömungsgeschwindigkeit

$$\vec{u}(\vec{r}, t)$$

NB: •  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  ist Ortsabhängig!

• Falls  $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r})$ , unabhängig von Zeit  $t$   
→ stationäre Strömung

Man unterscheidet

▶ Arten von Fluiden

◦ ideale Flüssigkeiten / Gase: vernachlässigbare Reibungskräfte z.B. Teilchen

◦ viskosen / zähen Flüssigkeiten: starke / überwiegende Reibungskräfte

▶ Arten von Strömungen

◦ laminare Strömungen: Reibungskräfte  $\gg$  Schubspannungskräfte



◦ turbulente Strömungen: Reibung  $<$  Beschleunigung



Wirbel



# 12.1 Ideale Flüssigkeiten

## 12.1.1 Euler-Gleichung

Bewegungsgleichung für Teilchen in idealen Flüssigkeiten

Kräfte auf Teilchen:

► Schwerkraft:  $\vec{F}_G = \Delta m \cdot \vec{g}$

► Druckgradient:  $\vec{F}_p = -\vec{\nabla} p \cdot dV = -\text{grad } p \cdot dV = -(\vec{\nabla} p) \cdot \frac{\Delta m}{\rho}$

[z.B. Druckänderung entlang x-Richtung

$p(x+dx) = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$  und  $p(x) = p$   
 $\rightarrow F_x = [p(x) - p(x+dx)] \cdot dA = [p - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx)] \cdot dx dy = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy = -\frac{\partial p}{\partial x} dV$

► Beschleunigungskraft: Zeit- und ortsbabhängig.

z.B. in x-Richtung

$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}$

$\rightarrow \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + (u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}) u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_x$

dito für y, z-Richtung

$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} (\vec{\nabla} p)$

Euler-Gleichung der Hydrodynamik

# 12.1.2 Kontinuitätsgleichung



Masse in Scheibe:

$dm = \rho_1 \cdot A_1 \cdot dx_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot dx_2 = dm$

$\rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho_1 \cdot A_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 \cdot A_2 \cdot u_2 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot u_2 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot \frac{dx_2}{dt}$

$\rightarrow \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$  inkompressible Flüssigkeit  $A_1 u_1 = A_2 u_2 = \text{const}$

makroskopisches Kontinuitätsgleichung

• (Massen-) Stromdichte / (Massen-) Flüssichichte

$\vec{j} = \rho \cdot \vec{u}$

mit  $\int_V d\vec{A} = -\frac{d}{dt} (V)$

Wenn  $\vec{j} \perp \vec{A}$ , dann nimmt Masse im eingeschlossenen Volumen ab!



$\int_V d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \cdot dV = -\frac{d}{dt} V$

Satz von Gauß-Ostrogradski

$\frac{d}{dt} V \rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \int_V \text{div } \vec{j} = 0$

Kontinuitätsgleichung

NB: (Volumen-) Stromstärke  $I := -\frac{d}{dt} \int_V dV = + \frac{d}{dt} \int_V (\rho \cdot V) = \frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot dV$

### 12.1.3 Bernoulli-Gleichung

Betrachte stationäre Strömung, d.h.  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

→ Euler-Gleichung

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \left( \frac{u^2}{2} \right) - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) \stackrel{!}{=} \nabla \left( \frac{1}{2} u^2 \right)$$

$$\nabla \left( \frac{u^2}{2} \right) = \text{z.B. } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2} \right) = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \rightarrow \nabla \left( \frac{u^2}{2} \right) = \nabla \left( \frac{1}{2} u^2 \right)$$

$\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{u}) - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$  Beweise, dass  $\vec{v}$  immer auf die  $\vec{u}$  wirkt!

$\int \nabla \left( \frac{u^2}{2} \right) - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{u}) - [(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}] = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{u} \cdot \text{grad } \vec{u}$

$$\int_{\vec{g}} d\vec{r} = \int_{\vec{g}} |\vec{u} \cdot d\vec{r}| \rightarrow \nabla \left( \frac{u^2}{2} \right) \cdot d\vec{r} = \left[ \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{u}) \right] \cdot \vec{u} \cdot d\vec{r} - \int \vec{g} \cdot d\vec{r} + \int \rho \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\rightarrow d \left( \frac{u^2}{2} \right) - 0 + g dx + \int dp = 0$$

$$\rightarrow \int_{\text{entlang Stromröhre}} d\vec{r} \left[ \frac{1}{2} (u^2 - u_0^2) + g(h - h_0) + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \right] = 0$$

Bernoulli-Gleichung

$$\boxed{\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g h + p = \text{const}}$$

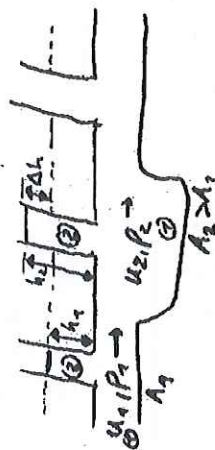
inkompressible Flüssigkeit,  $\rho = \text{const}$

NB: vgl. Energieerhaltung:  $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + p \cdot V = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g h + p \cdot V$

Bernoulli-Gleichung  $\hat{=}$  Energieerhaltung in Hydrodynamik

Beispiele der Anwendung der Bernoulli-Gl.

• Staudruck  $p_s = \rho \cdot \frac{u^2}{2}$



$$\textcircled{1}: \rho \frac{u_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{u_2^2}{2} + p_2$$

$$u_1 A_1 = u_2 A_2 \rightarrow u_2 = u_1 \frac{A_1}{A_2}$$

$u_2 < u_1$

$$\rightarrow \Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} (u_1^2 - u_2^2)$$

$\rightarrow \Delta p > 0$

$$\textcircled{2}: 0 + p_1 = p_0 + \rho g h_1$$

$$0 + p_2 = p_0 + \rho g h_2$$

$$\rightarrow \Delta h = h_2 - h_1 = \frac{1}{\rho g} (p_2 - p_1)$$

$$\rightarrow \Delta h = \frac{1}{\rho g} (u_1^2 - u_2^2) > 0$$

hydrostatisches Paradoxon



Luftström zwische zwei Blätter  $\rightarrow$  Blätter werden zusammengeblückt

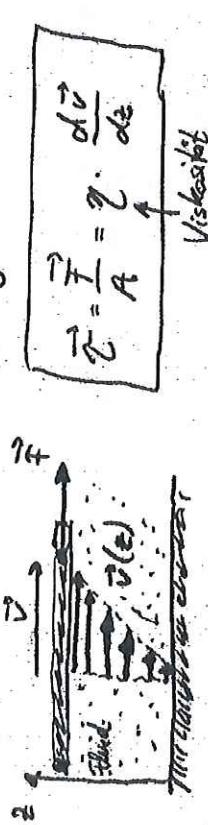


$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p = \text{const}$$

## 12.2 Dynamische Zähigkeit, Viskosität

- Viskosität / Zähigkeit beschreiben innere Reibung

→ bewegte Flüssigkeiten/Gase haben dynamische Scher-Spannung  $\vec{\tau}$



$$\vec{\tau} = \frac{F}{A} = \eta \cdot \frac{dv}{dz}$$

Viskosität  
Einheit:  $[\eta] = \frac{Ns}{m^2} = Pa \cdot s$

- e.B. Wasser  $\eta = 0.001025 Pa \cdot s$
- Glycerin  $\eta = 1.528 Pa \cdot s$
- Luft (20°C)  $\eta = 0.0000174 Pa \cdot s$

- Laminares Strömungsprofil in Rohr

Reibungskraft an axialem Flüssigkeitselement (Radius r, Länge L)

$$F_R = A \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dr} = 2\pi r \cdot L \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dr}$$

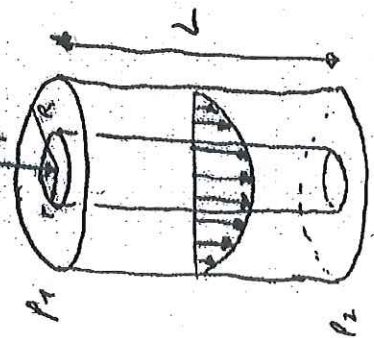
Druckkraft auf Zylinderdeckel

$$F_P = \pi r^2 \cdot (p_1 - p_2)$$

Stationäres Zustand:  $F_R = F_P$

$$\Rightarrow \dots \frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} \cdot r = \frac{\Delta p}{4\eta L} \cdot r$$

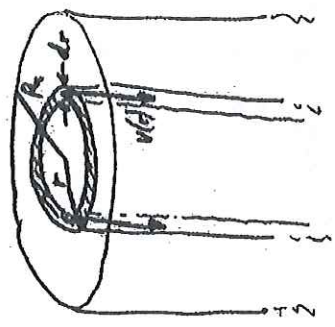
$$v(r) = v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta L} \cdot r^2$$



## 12.3 Strömungswiderstand

Betrachte laminares Strömungsprofil im Rohr

Volumenstromstärke dI durch Hohlzylinder zwischen r und r+dr



$$dI = d\dot{V} = 2\pi r dr \cdot v(r)$$

$$= 2\pi r \cdot \left( v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta L} \cdot r^2 \right) dr$$

$$\rightarrow I = \dot{V} = \int_0^R d\dot{V} = \int_0^R \dots dr$$

$$\rightarrow I = \dot{V} = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8\eta L} \cdot R^4$$

Gesetz von Hagen-Poiseuille

NB: Stromstärke  $I \sim R^4$   
 $\Delta I \sim \frac{I}{2}$   
 $\Delta I \sim \Delta p$

$$I = \int_0^R \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$\vec{v} = v(r) \vec{e}_z$$

$$dA = 2\pi r \cdot dr$$

Umfang Hohlzylinder  
 Mantelfläche Hohlzylinder

$$dI = v(r) \cdot dA = 2\pi r \cdot dr \cdot v(r)$$

## 12.4 - Navier - Stokes - Gleichung -

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \rho \nu \nabla^2 \vec{u}$$

$$= \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} \right) = -\text{grad } p + \rho \vec{g} + \rho \nu \Delta \vec{u}$$

$\Delta := \nabla^2$  Laplace-Operator

Lösung: schwierig analytisch zu finden!

- Computersimulation (→ numerische Lösung)
- experimentelle Lösung (z.B. Windkanal)

### Ähnlichkeitsgesetze

- Geometrische Ähnlichkeit (Abmessung überträgt Form)
- Hydrodynamische Ähnlichkeit

→ Dichte  $\rho$ , Viskosität  $\eta$ , mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$

- Kennzahlen (d. lineare Abmessung ab Dimension)

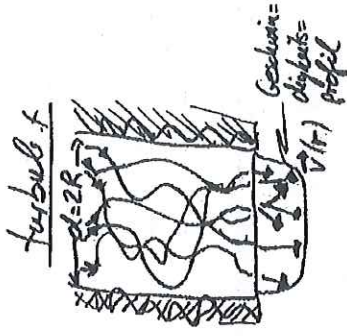
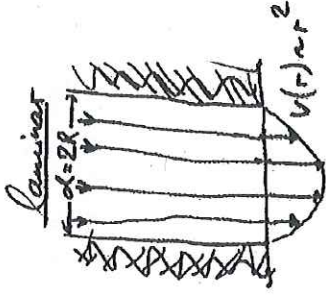
Reynoldszahl:  $Re = \frac{d \cdot \rho \cdot \bar{v}}{\eta}$  Trägheit / Zähigkeit

Froude-Zahl:  $Fr = \frac{\bar{v}}{\sqrt{g \cdot d}}$  Trägheit / Gewicht

Mach-Zahl:  $M = \frac{\bar{v}}{c_{schall}}$

→ Ähnlichkeit: z.B. Widerstandswerte  $C_w$  geometrisch ähnlicher Körper stimmen überein, wenn Reynoldszahlen gleich sind  
NB:  $Re = \text{const} \rightarrow \bar{v} \propto 1/d$

## 12.5 Turbulente Strömung



Charakteristik:

$$Re \leq Re_c$$

$$Re > Re_c$$

mit kritischer Reynoldszahl  $Re_c$

z.B. ▶ rundes Rohr, Durchmesser  $d=2R$

$$Re_c = \frac{2R \cdot \rho \cdot \bar{v}_c}{\eta} \approx 2300$$

▶ rundes Rohr mit glatten Einlauf

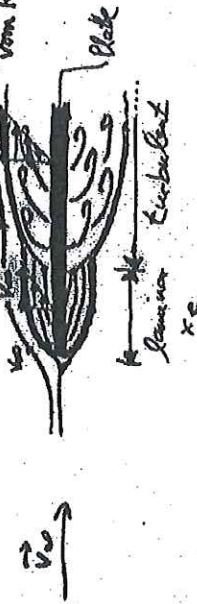
$$Re_c \approx 20000$$

▶ dito mit scharfkantigen Einlauf

$$Re_c = 1000 - 1200$$

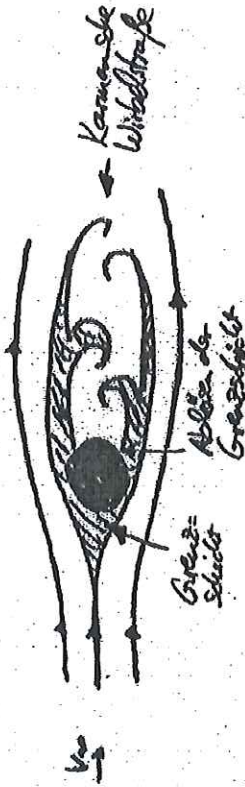
17.5.1 umströmte Körper

- Prandtl'sche Grenzschicht: In Prandtl'scher Grenzschicht nimmt  $v$  linear vom Körper bis zur Grenzschichtdicke  $\delta$  ab

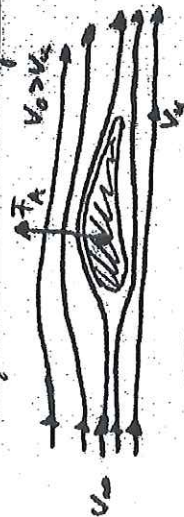


$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot x}{\eta} \approx 5 \cdot 10^5$$

- Abreißen der Prandtl'schen Grenzschicht für  $Re > Re_c$



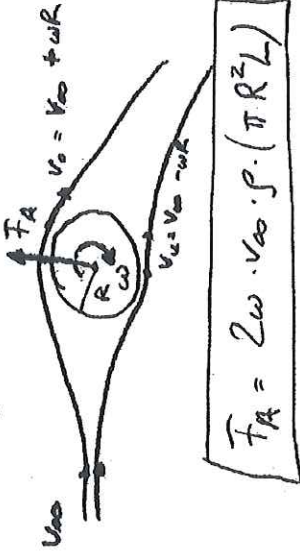
- dynamischer Auftrieb



$$F_A = \Delta p \cdot A = \rho \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} (v_0^2 - v_a^2)$$

↑ Flügelfläche  
↑ dynamischer Auftrieb (abhängig vom Profil)

- Magnus-Effekt



rotierendes Zylinder mit Längsl., Rotations

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - v_a^2) \text{ vgl. Bernoulli-Gleichung}$$

$$= \frac{1}{2} \rho [(v_0 + \omega R)^2 - (v_0 - \omega R)^2] = \dots = 2 \rho \omega R \cdot v_0$$

$$\rightarrow F_A = \Delta p \cdot A \quad \rightarrow F_A = 2 \rho \omega R \cdot v_0 \cdot \pi R L = 2 \omega v_0 \rho \pi R^2 L$$

↑ A = \pi \cdot (2 \pi R L) Zylinderhöhe \cdot Querschnitt

