

Übungsblatt ED 6

E2 Elektrodynamik, Prof. Braun, SoSe 2024 (*nur für E2)

RLC Stromkreis, Wellenausbreitung im Koaxkabel, Hohlleiter, Wechselstrom, Komplexe Widerstandsdarstellung, Filter, Tiefpass / Hochpass

Mündliche Aufwärmaufgaben

Fassen Sie die Relationen von Strom und Spannung zusammen für Widerstand R , Kapazität C und Spule L . Wie sind die Relationen in komplexer Frequenzraum-Schreibweise? Was sind die Formeln für die elektrische Leistung im Widerstand R , Kapazität C und Spule L ? Warum ist das B-Feld die mathematische Abkürzung für den relativistischen Effekt des E-Feldes?

Aufgaben zum Vorrechnen

1. (mittel) Gedämpfte Schwingung und Gütefaktor

Ein gedämpfter Oszillator verliere pro Periode 2 Prozent seiner Energie.

a) Nach wie vielen Perioden besitzt er nur noch die halbe Anfangsenergie?

b) Wie groß ist der Gütefaktor Q ? Der Gütefaktor Q ist definiert als $2 \cdot \pi \cdot$ gespeicherter Energie geteilt durch die abgegebene Energie pro Periode.

c) Wie breit ist die Resonanzkurve bei erzwungenen Schwingungen, wenn der Oszillator eine Eigenfrequenz von 50Hz besitzt? Recherchieren Sie die nötige Relation selbstständig !

2. (mittel) RLC Serienschaltung

a) Leiten Sie für den RLC-Serienschaltkreis die Differentialgleichung her, indem Sie energetisch argumentieren: Abnahme der elektrischen und magnetischen Feldenergie = Joulesche Wärme im Widerstand R . Tip: Um die Relation für I zu bekommen, werden Sie einmal zusätzlich zeitlich ableiten müssen.

b) Überprüfen Sie, daß die Differentialgleichung gelöst wird mit dem Ansatz für den Strom:

$$I = I_0 e^{-\omega_1 t} \cos(\omega t + \varphi)$$

und geben Sie Relationen für die Größen ω_1 und ω an. Gibt es eine Relation für φ ?

c) Geben Sie die Werte für ω_1 und ω an für $C = 0.01 \mu\text{F}$, $L = 100 \mu\text{H}$ und $R = 20 \Omega$. Welchen Q -Faktor hat dieses RLC-Glied (siehe Aufgabe 1)?

3. (leicht) Single Mode Faser.

Die inzwischen häufigste Anwendung eines Hohlleiters ist die Glasfaser. Hierbei wird Licht nicht mittels leitender Wände lokalisiert, sondern durch die Reflexion zwischen einem Kern- und Randmaterial mit unterschiedlichen optischen Brechungsindizes. Ein typische Wert der Dielektrizitätskonstante ϵ des Kerns bei den hohen Lichtfrequenzen (230 THz) liegt bei $\epsilon = 2.42$. Die Permeabilitätszahl des magnetischen Feldes hat keinen Einfluß mit $\mu=1$. Wie hoch ist dann die zu erwartende Lichtgeschwindigkeit (Gruppengeschwindigkeit) in der Faser?

4. (leicht-mittel) Laden und Entladen eines Kondensators.

a) Leiten Sie mit der Kirchhoffschen Regeln die Differentialgleichung für die Ladung auf dem Kondensator her für das Aufladen eines Kondensators C durch einen Widerstand R mit einer Spannungsquelle U_0 (serielle Schaltung). [Wie in Aufgabe 2 können Sie auch von einer energetischen Sichtweise starten, indem Sie die Aufnahme an elektrischer Feldenergie im Kondensator mit der Joulschen Wärme im Widerstand gleichsetzen.]

b) Lösen Sie die Differentialgleichung mit einem exponentiellen Ansatz mit einer Zeitkonstante τ . Geben Sie den Wert der Zeitkonstante für $R = 200 \Omega$ und $C = 20\mu\text{F}$ an.

c) Wie sieht die Differentialgleichung und die Lösung für das Entladen des Kondensators aus?

d) Sie haben eine Wechselspannungsquelle und möchten mit einer elektrischen Schaltung dafür sorgen, daß nur Frequenzen unterhalb von rund 2kHz durchgelassen werden (Tiefpass 1. Ordnung). Sie benötigen dafür einen Widerstand R und einen Kondensator C . Wie groß sollte C sein, wenn $R=500 \Omega$ gewählt wird?

e) Wie muß die Schaltung aussehen, wenn Sie nur Frequenzen oberhalb von 2kHz durchlassen wollen (Hochpass 1. Ordnung)?

Aufgaben falls noch Zeit sein sollte:

5. (mittel) Elektrische \Leftrightarrow mechanische Schwingung.

Entwickeln Sie eine quantitative Analogie. Analogien haben in der Geschichte der Physik stets eine wichtige Rolle gespielt, weil man sie dazu nutzen kann, die identische mathematische Analyse auf sehr unterschiedliche Themenfelder anzuwenden. Wir wollen die mechanische Schwingung auf elektrische Schaltkreise anwenden (und umgekehrt). Deformationen ε werden als relative Längenänderungen $\Delta l/l$ eingeführt. Sie führen zu Spannungen $\sigma = \text{Kraft}/\text{Fläche}$ mittels linearen Relationen. Federn erfüllen die Relation $\sigma = E * \varepsilon$ mit einer Elastizität E , viskose Elemente (Dämpfer) reagieren nur auf die Geschwindigkeit der Längenänderung mittels $\sigma = \eta * d\varepsilon/dt$ und einer Viskosität η . Wenn Sie nun die Analogie Deformation $\varepsilon \Leftrightarrow$ Ladung Q machen, was ist dann das elektrische Analogon einer Spannung σ ? Was beschreibt dann eine Feder und ein Dämpfer? Was sind dann die Analogen Größen von E und η ? Sie können sogar das Element der Massenträgheit $\sigma = -m * d^2\varepsilon/dt^2$ wiederfinden und die Masse m elektrisch interpretieren. Ohne in die Details zu gehen, können Sie sich vorstellen, nun “mechanische Schaltkreise” für mechanische Elemente (z.B. Autofederungen) genauso wie elektrische Elemente zusammenschalten (parallel, seriell, Kirchhoff'sche Regeln, Untersuchung des Frequenzverhaltens,)

6. (mittel) Hohlleiterresonanz

Für einen quaderförmigen Hohlleiter mit Dimensionen $a = 37\text{cm}$, $b = 21\text{cm}$ und $l = 56\text{cm}$ seien die zugehörigen Modenzahlen n , m und p . Aus der Dispersionsrelation ergibt sich für eine Resonanz der Frequenz die Bedingung

$$f_{n, m, p} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}$$

Für TE-Resonanzen muß $p \geq 1$ sein und $n=m=0$ ist ausgeschlossen. Für TM-Resonanzen dürfen n und m nicht 0 sein, p allerdings darf nun auch $p=0$ annehmen.

a) Berechnen Sie die resonante Mode mit der kleinsten Frequenz f . Wenn Sie die Größen a, b, l jeweils mit einer Genauigkeit von 0.1mm messen können und die Resonanzfrequenzbestimmung eine Genauigkeit von 10^{-5} hat (ein Q-Faktor von rund 10^4 ist hierzu nötig), mit welcher relativen Genauigkeit können Sie dann die Lichtgeschwindigkeit c messen?

b) Geben Sie die möglichen Modenfrequenzen $f_{n, m, p}$ und Modentypen für den Bereich $1 \dots 1000 \text{ MHz}$ an.