

## Übungen zu T3p Elektrodynamik im SoSe 2023 Blatt 7

### Aufgabe 1: Multipolentwicklung I

Eine Ladung  $+Q$  sei gleichförmig entlang der  $z$ -Achse von  $z = -a$  bis  $z = +a$  verteilt. Zeigen Sie, dass das elektrische Potential am Punkt  $\mathbf{r}$  durch

$$\Phi(r, \theta) = \frac{Q}{r} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \frac{1}{5} \left( \frac{a}{r} \right)^4 P_4(\cos \theta) + \dots \right] \quad (1)$$

für  $r > a$  gegeben ist.

Wie groß ist das Dipolmoment, wie groß das Quadrupolmoment?

*Hinweis:* Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannte Formel für die Multipolentwicklung

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int (r')^l P_l(\cos \theta') \rho(\mathbf{r}') d^3 r' . \quad (2)$$

### Aufgabe 2: Multipolentwicklung II

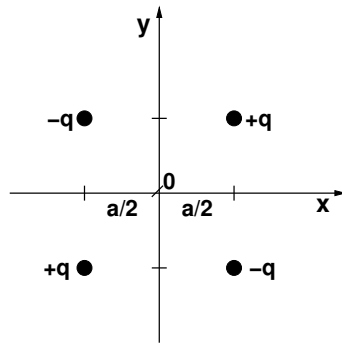
- a) Berechnen Sie alle neun Einträge des Quadrupoltensors  $Q_{ij}$  für die skizzierte Konfiguration auf Seite 2.

*Hinweis:* Das Quadrupolmoment ist definiert als

$$Q_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}') (3r'_i r'_j - (r')^2 \delta_{ij}) d^3 r' . \quad (3)$$

- b) Zeigen Sie, dass das Quadrupolmoment unabhängig vom Ursprung ist, wenn Monopol- und Dipolmoment verschwinden.

*Hinweis:* Führen Sie eine Translation der Ladungsverteilung um den konstanten Vektor  $\mathbf{d}$  durch, d.h. ersetzen Sie in (3) die Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r}')$  durch  $\rho(\mathbf{r}' + \mathbf{d})$  innerhalb des Integrals und substituieren Sie anschließend  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}' - \mathbf{d}$ .



Monopol- und Dipolmoment sind definiert durch

$$q = \int \rho(\mathbf{r}') d^3r' \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3r' . \quad (4)$$

*Bemerkung:* Dies gilt auch allgemein für höhere Ordnungen in der Multipolentwicklung. Das kleinste, nichtverschwindende Multipolmoment ist immer unabhängig vom Ursprung.

- c) Wie würden Sie das **Oktopolmoment** definieren? Betrachten Sie dafür die Multipolentwicklung (2) in der Ordnung  $n = 3$ . Drücken Sie den Oktopolterm in der Entwicklung durch das Oktopolmoment aus.