LMU München
Fakultät für Physik

Prof. G. Buchalla 10. Juli 2023

Übungen zu T3p Elektrodynamik im SoSe 2023
Blatt 13

Aufgabe 1: Koaxialkabel als Wellenleiter

Ein Koaxialkabel besteht aus zwei leitfähigen, konzentrischen Kreiszylindern, zwischen denen sich ein Vakuum befindet. Die Zylinder seien um die z-Achse zentriert. Der innere Zylinder habe den Radius a und der innere Rand des äußeren Zylinders fange bei b an. In Koaxialkabeln können transversalelektromagnetische Wellen (TEM-Wellen) propagieren, die in hohlen Wellenleitern hingegen nicht existieren. Mathematisch ausgedrückt, bedeutet dies für die Felder ($\mathbf{F} = \mathbf{E}, \mathbf{B}$), dass

$$F_z = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(x, y) e^{i(kz-\omega t)} \ . \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die Felder im Inneren des Kabels die Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik in zwei Dimensionen erfüllen:

$$\partial_x F_x + \partial_y F_y = 0 \ , \qquad \partial_x F_y - \partial_y F_x = 0 \ . \tag{2}$$

b) Leiten Sie aus der Wellengleichung die Dispersionsrelation $\omega = ck$ her.

c) Weisen Sie nach, dass in Zylinderkoordinaten die Lösungen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{r} e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{e}_r \qquad \text{und} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{r} e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{e}_\varphi \tag{3}$$

mit konstantem A die Maxwell-Gleichungen und die Randbedingungen erfüllen.

d) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\lambda(z, t)$ und den Strom $I(z, t)$ des inneren Leiters mit Hilfe der Integralsätze von Gauß und Stokes.