LMU München
Fakultät für Physik

Prof. G. Buchalla 3. Juli 2023

Übungen zu T3p Elektrodynamik im SoSe 2023
Blatt 12

Aufgabe 1: Polarisierung und Magnetisierung

Ein beliebig geformter Körper befinde sich in einem Raum ohne weitere Ladungen. Der Körper sei insgesamt elektrisch neutral und es treten nur gebundene Ladungen und Ströme auf. Betrachten Sie zudem im Folgenden den Fall statischer Polarisierungs- und Magnetisierungsdichten innerhalb des Körpers.

a) Wie lautet die gebundene Ladungs- und Stromdichte in diesem System?

b) Zeigen Sie, dass das Dipolmoment $\mathbf{p}$ des Körpers durch das Volumenintegral über die Polarisierungsdichte $\mathbf{P}$ gegeben ist, d.h.

$$\mathbf{p} = \int d^3r \; \mathbf{P}(\mathbf{r}) \; . \tag{1}$$

c) Leiten Sie das Analogon zu (1) für das magnetische Moment $\mathbf{m}$ und die Magnetisierungsdichte $\mathbf{M}$ des Körpers her.
Hinweis: Das magnetische Moment einer Stromdichte ist definiert durch

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r \; \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) \; . \tag{2}$$

Aufgabe 2: Ebene Welle

Betrachten Sie die Potentiale $\phi(\mathbf{r}) = 0$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(x - ct)\mathbf{e}_z$, wobei A eine beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktion in einer Variablen ist. Diese Potentiale definieren eine ebene elektromagnetische Welle im Vakuum.

a) Zeigen Sie, dass die Potentiale der Lorenz-Eichung und der Wellengleichung genügen.

b) Bestimmen Sie das elektrische und magnetische Feld sowie die Energiedichte und den Poynting-Vektor.

c) Überprüfen Sie die Gültigkeit des Poynting-Theorems.

Aufgabe 3: Komplexe Notation für ebene Wellen

Zwei ebene Wellen seien in komplexer Schreibweise gegeben durch

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \ , \qquad \mathbf{B} = (\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \ . \tag{3}$$

Die zeitunabhängigen Vektoren $\mathbf{E}_{1,2}$ und $\mathbf{B}_{1,2}$ sowie der Wellenvektor $\mathbf{k}$ und die Frequenz ω seien reell. Die reellen Ausdrücke für die Felder können dann als $\mathrm{Re}(\mathbf{E})$ und $\mathrm{Re}(\mathbf{B})$ geschrieben werden.

a) Zeigen Sie, dass für das Zeitmittel über eine volle Periode

$$\langle \mathrm{Re}(E_i)\mathrm{Re}(B_j)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_i B_j^*) \tag{4}$$

gilt, wobei $i, j = x, y, z$ die Komponenten der Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ indizieren.
Hinweis: Das Zeitmittel über eine Periode der Funktion f ist definiert durch

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ dt \qquad \text{mit} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \ . \tag{5}$$

b) Beweisen Sie mit (4) die folgenden Ausdrücke für die Energiedichte und den Poynting-Vektor von ebenen elektromagnetischen Wellen in komplexer Notation:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{16\pi}\left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) \ , \qquad \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*\right) \ . \tag{6}$$