LMU München
Fakultät für Physik

Prof. G. Buchalla 25. April 2022

Übungen zu T1p Mechanik im SoSe 2022
Blatt 1

Aufgabe 1: Epsilon-Tensor

In kartesischen Koordinaten ist das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch $\vec{a}\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$ gegeben. Unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention, gemäß der über doppelt auftretende Indizes über ihren jeweiligen Laufbereich zu summieren ist, schreibt man $\vec{a}\vec{b} = a_i b_i$.
Die Komponenten des Vektorprodukts sind $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$. Dabei ist der total antisymmetrische Tensor $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj}$ durch $\epsilon_{123} = +1$ vollständig definiert.
Die Determinante einer 3×3-Matrix A hat somit die Form $\det A = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$.
Eine weitere nützliche Relation ist $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$, wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol darstellt ($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sonst).

Beweisen Sie folgende Relationen unter Benutzung von δ_{ij} und ϵ_{ijk}:

a) $\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{c} \times \vec{a}\right) = \vec{c}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$,

b) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\vec{b}\right)$,

c) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$ (Jacobi-Identität),

d) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left(\vec{a}\vec{c}\right)\left(\vec{b}\vec{d}\right) - \left(\vec{b}\vec{c}\right)\left(\vec{a}\vec{d}\right)$

Aufgabe 2: Massenpunkt

a) Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer Bahn, die durch die Gleichung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} ae^{-2\alpha t} \\ b \sin 2\beta t \\ c \cos \gamma t \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit Konstanten $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ gegeben ist. Bestimmen Sie den Betrag der Geschwindigkeit und der Beschleunigung als Funktion der Zeit.

b) Die Beschleunigung eines Massenpunktes sei gegeben durch

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} at^3 \\ -b \cos \beta t \\ 3c \sin \gamma t \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit Konstanten a, b, c, β, γ. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Massenpunkt im Ursprung und hat die Geschwindigkeit $\vec{v}(0) = 0$. Berechen Sie die Geschwindigkeit und den Ort des Massenpunktes zur Zeit t.

Besprechung in der Woche vom 2.5. - 6.5.2022