

Übungen zu T1p Mechanik im SoSe 2021

Blatt 2

Aufgabe 1: Schraubenlinie

Gegeben ist die Schraubenlinie

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} at \\ b \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{pmatrix} \quad a, b, \omega \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \equiv \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \quad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) \equiv \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t)$$

b) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit  $|\vec{v}(t)|$  und der Beschleunigung  $|\vec{a}(t)|$ .

c) Sind Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  und Beschleunigung  $\vec{a}(t)$  orthogonal zueinander? Zeigen Sie, dass  $\vec{v}(t)$  und  $\vec{a}(t)$  für jede Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  orthogonal zueinander sind, wenn der Betrag der Geschwindigkeit  $|\vec{v}(t)|$  konstant ist.

## Aufgabe 2: Brachistochrone (Johann Bernoulli 1696)

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei entlang einer festen Kurve  $K$  im Schwerfeld der Erde vom Anfangspunkt  $A = (0, 0)$  zum Endpunkt  $B = (x_b, y_b)$ . Seine Anfangsgeschwindigkeit im Punkt  $A$  ist gleich Null. Wie muss man  $K$  wählen, damit die Transitzeit

$$T = \int_A^B \frac{ds}{|\vec{v}|} = \sqrt{\frac{1}{2g}} \cdot \int_0^{x_b} dx f(y(x), y'(x)) \quad \text{mit} \quad f(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} \quad \text{und} \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

möglichst klein ist ?

*Hinweise:*

- a) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für  $y(x)$  her.
- b) Anstatt diese Differentialgleichung zu lösen, können Sie zur Lösung des Problems die Konstanz der folgenden Größe ausnutzen:

$$I = y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \tag{1}$$

Überzeugen Sie sich, dass  $I$  für beliebige Funktionen  $f$  konstant bleibt, indem Sie  $\frac{dI}{dx} = 0$  mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung zeigen.

- c) Die Gleichung (1) ergibt eine DGL der Form:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{\alpha - y}}$$

Bestimmen Sie  $\alpha$  als Funktion von  $I$ . Die Differentialgleichung kann über die Variablensubstitution  $y = \frac{\alpha}{2}(1 - \cos \tau) = \alpha \sin^2(\frac{\tau}{2})$  gelöst werden. Finden Sie  $x(\tau)$ . Die Kurve  $K$  ist dann in der Parameterdarstellung durch  $y(\tau)$  und  $x(\tau)$  gegeben.

**Besprechung in der Woche vom 26.4. - 30.4.2021**