

Übungen zu T1p Mechanik im SoSe 2021

Blatt 1

Aufgabe 1: Epsilon-Tensor

In kartesischen Koordinaten ist das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  durch  $\vec{a}\vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$  gegeben. Unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention, gemäß der über doppelt auftretende Indizes über ihren jeweiligen Laufbereich zu summieren ist, schreibt man  $\vec{a}\vec{b} = a_i b_i$ .

Die Komponenten des Vektorprodukts sind  $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ . Dabei ist der total antisymmetrische Tensor  $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj}$  durch  $\epsilon_{123} = +1$  vollständig definiert.

Die Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix  $A$  hat somit die Form  $\det A = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$ .

Eine weitere nützliche Relation ist  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$ , wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol darstellt ( $\delta_{ij} = 1$  für  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  sonst).

Beweisen Sie folgende Relationen unter Benutzung von  $\delta_{ij}$  und  $\epsilon_{ijk}$ :

$$\text{a) } \vec{a} (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} (\vec{a} \times \vec{b}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a}\vec{c}) - \vec{c} (\vec{a}\vec{b}),$$

$$\text{c) } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad (\text{Jacobi-Identität}),$$

$$\text{d) } (\vec{a} \times \vec{b}) (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c}) (\vec{b}\vec{d}) - (\vec{b}\vec{c}) (\vec{a}\vec{d})$$

## Aufgabe 2: Massenpunkt

- a) Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer Bahn, die durch die Gleichung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} ae^{-2\alpha t} \\ b \sin 2\beta t \\ c \cos \gamma t \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit Konstanten  $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$  gegeben ist. Bestimmen Sie den Betrag der Geschwindigkeit und der Beschleunigung als Funktion der Zeit.

- b) Die Beschleunigung eines Massenpunktes sei gegeben durch

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} at^3 \\ -b \cos \beta t \\ 3c \sin \gamma t \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit Konstanten  $a, b, c, \beta, \gamma$ . Zur Zeit  $t = 0$  befindet sich der Massenpunkt im Ursprung und hat die Geschwindigkeit  $\vec{v}(0) = 0$ . Berechnen Sie die Geschwindigkeit und den Ort des Massenpunktes zur Zeit  $t$ .

Besprechung in der Woche vom 19.4. - 23.4.2021