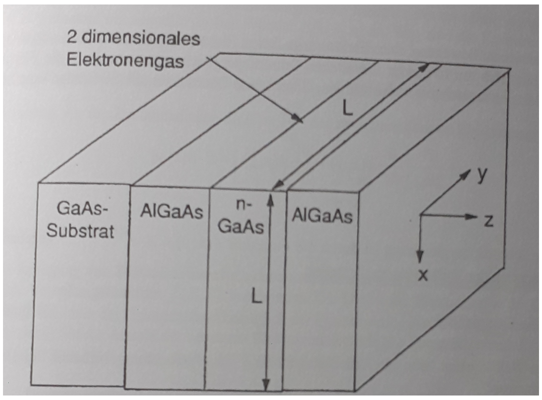
Eigenschaften des 2d-Elektronengases eines Quantum-Well-Systems



Heutzutage ist es technologisch möglich, Halbleiterschichten mit Dicken von einigen Angström (das entspricht wenigen Atomlagen) aufeinander abzuscheiden. Wir betrachten ein sogenanntes "Quantum-Well"-System, bei dem auf einem Substrat aus GaAs eine Schicht AlGaAs, eine Schicht n-dotiertes GaAs und wieder eine Schicht AlGaAs abgeschieden wird (siehe Skizze). Im Folgenden sollen die Eigenschaften des Elektronengases in der GaAs-Schicht betrachtet werden. Die freie Bewegung der Elektronen in dieser Schicht ist durch die AlGaAs-Schichten an ihren Rändern auf zwei Dimensionen (auf die x-y-Ebene der GaAs-Schicht) beschränkt, da die Leitungsbandkante der AlGaAs-Schichten höher liegt als die der GaAs-Schicht. Die effektive Masser der Elektronen in der GaAs-Schicht sei m_e.

a) Approximieren Sie das "Quantum-Well"-System durch einen in z-Richtung verlaufenden Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden! Leiten Sie einen Ausdruck für die ersten beiden erlaubten Zustände ($n = 1, n = 2$) in diesem Potential her! Die Dicke der GaAs-Schicht sei d. **(3 Punkte)**

b) Die zweidimensionale Bewegung eines Elektrons im freien Elektronengas in der GaAs-Schicht (x-y-Ebene) lässt sich mit folgender Einteilchen-Schrödingergleichung beschreiben (die Wechselwirkung der Elektronen untereinander und mit dem Gitter sowie Oberflächeneffekte werden vernachlässigt):

$$-\frac{h^2}{2m_e}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\psi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\psi(x,y)\right]=E\,\psi(x,y)$$

Eine Lösung der Schrödingergleichung ist durch die Funktion $\psi(x,y) = A\,e^{i(k_x x+k_y y)}$ gegeben, wobei k_x, k_y die Komponenten des Wellenvektors darstellen.

Bestimmen Sie die Energie $E(k_x, k_y)$ **(4 Punkte)**

c) Das "Quantum-Well"-System habe die Abmessungen LxL in x-y-Richtung. Nehmen Sie periodische Randbedingungen:

$$\psi(x+L,y) = \psi(x,y)$$
$$\psi(x,L+y) = \psi(x,y)$$

d.h. ein Elektron, das die Probe auf einer Oberfläche verlässt, tritt an der ihr gegenüberliegenden Oberfläche wieder in die Probe ein.

Geben Sie die erlaubten Werte für k_x und k_y an. Leiten Sie hieraus die Fläche im Wellenvektorraum ($k_x - k_y$-Ebene) ab, die im Mittel einem Elektron eines einzelnen erlaubten Zustandes zur Verfügung steht. **(3 Punkte)**

d) Zeigen Sie, dass die Anzahl der erlaubten Zustände N im Wellenvektorraum, die von einem Kreis mit dem Fermi-Radius k_F eingeschlossen werden, durch $N = 2\,\frac{k_F^2\,\pi}{(2\pi/L)^2}$ gegeben ist. Berücksichtigen Sie dabei, dass jeder Zustand im Wellenvektorraum der Spinentartung unterliegt. **(4 Punkte)**

e) Die Gesamtenergie eines Elektrons in der GaAs-Schicht setzt sich zusammen aus der Energie der zweidimensionalen freien Bewegung und der quantisierten Energie im Potentialtopf mit unendliche hohen Wänden.

Geben Sie einen Ausdruck für die Gesamtenergie eines Elektrons des zweidimensionalen Elektronengases im Potentialtopf mit unendliche hohen Wänden $E(k_x, k_y, n)$ an. Was sind die Konturen konstanter Energie im Wellenvektorraum (d.h. in der $k_x - k_y$-Ebene)? **(4 Punkte)**

f) Zeigen Sie mithilfe der Dispersionsrelation $E(k_x, k_y)$ und dem Ergebnis der Teilaufgabe d), dass der Ausdruck für die Zustandsdichte $D(E) = \frac{dN}{dE}$ des zweidimensionalen Elektronengases

$$D(E) = \frac{L^2\, m_e}{\pi\, \hbar^2}$$

lautet. **(4 Punkte)**

g) Die Anregung von Zuständen innerhalb des zweidimensionalen Elektronengases wird mit der Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion $f(E, T)$ beschrieben. Die Dichte der Elektronen in der GaAs-Schicht sei so gering, dass nur der Grundzustand bezüglich der Quantisierung in z-Richtung betrachtet werden muss. Skizzieren Sie die Anzahl der besetzten Elektronenzustände pro Energieintervall $D(E)\, f(E, T)$ als Funktion ihrer Energie für den Fall $T = 0$ und den Fall $T > 0$. **(5 Punkte)**

h) Das "Quantum-Well"-System werde nun in ein senkrecht zur GaAs-Ebene stehendes statisches Magnetfeld B_z gebracht.
Leiten Sie eine Formel für die Zyklotronfrequenz ω_c des Elektrons her. **(3 Punkte)**