

### Spin-Bahn- und Hyperfein-Wechselwirkung in Wasserstoff

Die Spin-Bahn-Aufspaltung der elektronischen Energieniveaus im Wasserstoffatom soll in den folgenden Teilaufgaben in einem semiklassischen Modell abgeschätzt werden. Nehmen Sie hierzu an, dass das Elektron (Masse  $m_0$ ) den Kern wie ein klassisches geladenes Teilchen im Abstand  $a$  umkreist.

- a) Nach dem Biot-Savart-Gesetz erzeugt eine am Ort  $\mathbf{r}$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegte Ladung  $Q$  am Koordinatenursprung eine magnetische Induktion

$$\mathbf{B} = -\frac{Q\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{v} \times \mathbf{r}.$$

Begründen Sie, weshalb sich im Ruhesystem des Elektrons durch dessen Bahnbewegung eine magnetische Induktion ergibt und zeigen Sie, dass deren Wechselwirkung mit dem Spinnmoment des Elektrons zur Energieverschiebung

$$\Delta E_{LS} = \frac{e^2 \mu_0}{4\pi m_0^2 a^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

führt!  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{S}$  bezeichnen den Bahndrehimpuls bzw. den Spin des Elektrons. (3 Punkte)

- b) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass gilt  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$ , wobei  $s$ ,  $l$  und  $j$  die Spin-, Bahndrehimpuls- und Gesamtdrehimpulsquantenzahlen des Elektrons sind! (2 Punkte)

- c) Berechnen Sie den energetischen Abstand zwischen den beiden Spin-Bahn-aufgespalteten 2p-Zuständen in eV, indem Sie  $a$  durch den zugehörigen klassischen Bahnradius nähern! (3 Punkte)

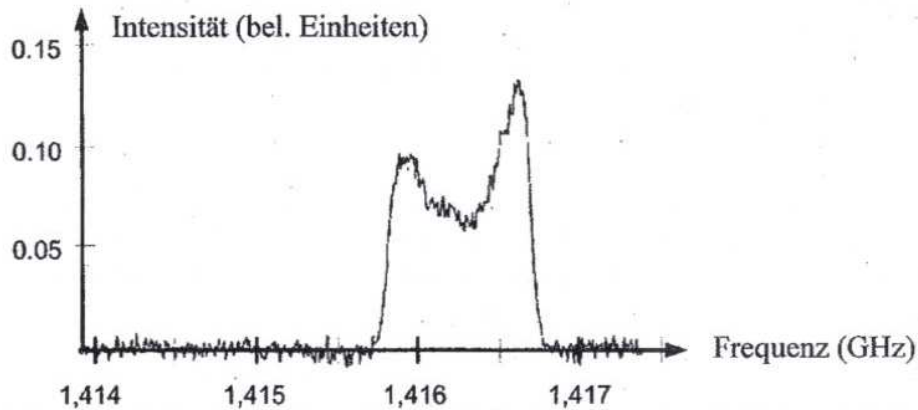
Unter Berücksichtigung der Hyperfeinwechselwirkung wird als weitere Korrektur

$$\Delta E_{HFS} = \frac{A}{2} [F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)]$$

eingeführt, wobei  $A$  die Hyperfeinkonstante,  $I$  die Kernspinquantenzahl und  $F$  die Gesamtdrehimpulsquantenzahl des gesamten Atoms darstellen.

- d) Geben Sie eine physikalische Begründung für den Ursprung der Hyperfeinwechselwirkung! (2 Punkte)
- e) Skizzieren Sie das Hyperfein-Termschema für den Grundzustand des Wasserstoffatoms bestehend aus Proton und Elektron! Bestimmen Sie die Größe der Hyperfeinaufspaltung als Funktion von  $A$  und berechnen Sie hieraus  $A$  in eV, wenn die spektrale Aufspaltung 1,420 GHz beträgt! (4 Punkte)

- f) Von einer fernen Galaxie wird Strahlung emittiert, die dieser Hyperfeinaufspaltung zugeordnet wird (siehe Abbildung). Begründen Sie, weshalb die Linie gegenüber der in e) genannten Frequenz verschoben ist, und bestimmen Sie aus der Verschiebung der Zentralfrequenz die Entfernung der Galaxie in Mparsec! Begründen Sie, weshalb im Spektrum zwei Maxima auftreten! (4 Punkte)



Hinweis: Die Proportionalitätskonstante zwischen der Entfernung  $x$  einer Galaxie und deren Fluchtgeschwindigkeit  $v$  ist durch die Hubblekonstante  $H = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mparsec}^{-1}$  gegeben.

- g) Begründen Sie, weshalb die Zustände des Wasserstoffatoms in einem starken Magnetfeld ( $B > 10 \text{ T}$ ) in guter Näherung nach den Richtungsquantenzahlen  $m_l$  des Kernspins,  $m_s$  des Elektronenspins und  $m_l$  des Bahndrehimpulses des Elektrons klassifiziert werden können! (2 Punkte)