6. Übung zur Vorlesung Atom- und Molekülphysik (E4) SS2021

Prof. H. Weinfurter, Dr. L. Knips

Kleine Änderung im Hinweis in Aufgabe 18a) zur Klärung.

Aufgabe 18 Optische Blochgleichungen und Darstellung von Zuständen auf der Blochkugel

a) Bestimmen Sie die Komponenten u, v, w des Blochvektors $\vec{r}$ für die beiden Zustände $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$ und $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i\,|2\rangle)$ und stellen Sie diese auf der Blochkugel graphisch dar. Benutzen Sie für die Darstellung (im mit ω_L rotierenden Koordinatensystem) den Fall ohne Verstimmung $\delta = 0$.
Hinweis: Diese Zustände sind im Bezugssystem, das mit der Übergangsfrequenz ω_{21} des Atoms rotiert, definiert und noch nicht im mit der Lichtfeldfrequenz ω_L rotierenden Koordinatensystem. Die Transformation aus Ersterem in Letzteres erfolgt über $\tilde{c}_1 = c_1 \cdot e^{-i\frac{\delta}{2}}$, $\tilde{c}_2 = c_2 \cdot e^{i\frac{\delta}{2}}$.
Ausgehend von der Dichtematrix $\tilde{\rho} = |\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}| = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1^* & \tilde{c}_2^* \end{pmatrix}$ ist der Blochvektor $\vec{r}$ definiert als

$$\vec{r} := \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Re(\tilde{\rho}_{12}) \\ 2\Im(\tilde{\rho}_{12}) \\ \tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{11} \end{pmatrix}$$

b) Skizzieren Sie auf der Blochkugel die Evolution des Anfangszustands $|2\rangle$, wenn resonantes Licht mit Rabifrequenz Ω_0 eingestrahlt wird (siehe Aufg. 17) für das Zeitintervall $t = 0..\pi/\Omega_0$.

Hat der angeregten Zustand $|2\rangle$ eine endliche Lebensdauer, so dass dessen Besetzung mit der Rate γ in den Grundzustand zerfällt, und ist das Lichtfeld um die Frequenz δ verstimmt, folgt die zeitliche Entwicklung der Komponenten den Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}u = -\frac{\gamma}{2}u + \delta v, \tag{1a}$$

$$\frac{d}{dt}v = -\delta u - \frac{\gamma}{2}v + \Omega_0 w, \tag{1b}$$

$$\frac{d}{dt}w = -\Omega_0 v - \gamma(w+1). \tag{1c}$$

c) Zeigen Sie, dass sich Gleichungen (1) für $\gamma = 0$ als

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{r} \times \vec{\beta}$$

schreiben lassen und bestimmen Sie $\vec{\beta}$ und $\left|\vec{\beta}\right|$.

d) Skizzieren Sie für $\delta = 0$, $\gamma = 0$ (resonante Bestrahlung, unendliche Lebensdauer von $|2\rangle$) die Evolution der Ausgangszustände $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ auf der Blochkugel.

e) Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf von $\vec{r}(t)$ für allgemeines $\vec{\beta}$ bei $\gamma = 0$ auf der Blochkugel.

f) **(optional)** Skizzieren Sie die Besetzung des angeregten Zustandes $\tilde{\rho}_{22}$ für die Fälle $\gamma = \Omega_0/4$ und $\gamma = 2\Omega_0$ jeweils für $\delta = 0$ in einem sinnvollen Zeitintervall. Das System sei anfänglich im Grundzustand.

Hinweis: Verwenden Sie eine numerische Lösung, indem Sie das Problem mit genügend kleinen Zeitschritte diskretisieren oder auf entsprechende Funktionen (Python (odeint), Mathematica (NDSolve), Matlab, etc.) zurückgreifen.

g) Betrachten Sie nun den stationären Fall, d.h. $\frac{d}{dt}\vec{r} = 0$. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslösung von w für allgemeine Ω_0, δ, γ.

Aufgabe 19 (nur E4) Auswahlregeln atomarer Dipolübergänge

Die Wechselwirkung von Licht in Form einer klassischen elektromagnetischen Welle, gegeben durch deren elektrisches Feld $\mathbf{E}(t) = \boldsymbol{\varepsilon} E_0 \sin(\omega t)$, mit einem Atom in Dipolnäherung wird durch den Wechselwirkungsoperator $\hat{H}' = -\hat{\mathbf{d}}\mathbf{E}(t)$ beschrieben. In Erweiterungen zu den Überlegungen aus der Vorlesung wird hier auch die Abhängigkeit von der Lichtpolarisation betrachtet. Ist das E-Feld entlang der z-Achse linear polarisiert, so vereinfacht sich der Wechselwirkungsoperator zu $\hat{H}' = -\hat{d}_z E(t) = e\hat{z}E(t)$, wobei $\hat{d}_z$ die z-Komponente des Dipoloperators ist. Die Kopplungsstärke eines elektrischen Dipolübergangs zwischen den Zuständen $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ wird hier also durch das Dipolmatrixelement $d_{21} = -e\langle\psi_2|\hat{z}|\psi_1\rangle$ bestimmt.

a) Berechnen Sie die Dipolmatrixelemente für folgende vier Übergänge im Wasserstoffatom:
$1s(n = 1, l = 0, m_l = 0) \to 2s(n = 2, l = 0, m_l = 0)$,
$1s(n = 1, l = 0, m_l = 0) \to 2p(n = 2, l = 1, m_l = 0, \pm 1)$.

Hinweis: Es werden nur Matrixelemente von $\hat{d}_z$ mit $z = r\cos(\theta)$ benötigt. Benutzen Sie Symmetrieüberlegungen zum Lösen der Integrale (analog zu Aufgabe 16).

b) Interpretieren Sie die Ergebnisse (z.B. in Verbindung mit Aufgabe 16).

Aufgabe 20 Drehimpulsalgebra

Seien J_x, J_y, J_z Operatoren, welche folgenden Vertauschungsrelationen genügen

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y.$$

Ferner seien der Operator $J^2 := J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$, der Aufsteigeoperator $J_+ := J_x + iJ_y$ und der Absteigeoperator $J_- := J_x - iJ_y$ definiert. Für die (normierten) Eigenzustände $|j,m\rangle$ gilt $J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle$ und $J_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle$.

a) Beweisen Sie, dass J^2 mit allen Komponenten J_x, J_y, J_z kommutiert.

b) Beweisen Sie, dass $[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$ und $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$.

c) Zeigen Sie, dass $J_\pm|j,m\rangle$ Eigenzustände von J_z mit Eigenwerten $\hbar(m \pm 1)$ sind.

d) Berechnen Sie J_+J_- und J_-J_+ und leiten Sie daraus einen Ausdruck für J^2 ab, welcher keine Terme mit J_x, J_y enthält.

e) Benutzen Sie das Ergebnis aus d) um die Norm von $J_\pm|j,m\rangle$ zu berechnen. Was passiert für $m = \pm j$?

Ein Wasserstoffatom sei im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{30}} \left(|\psi_{100}\rangle + 3\,|\psi_{211}\rangle + 4\,|\psi_{210}\rangle + 2\,|\psi_{21-1}\rangle\right)$$

f) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von L^2 und L_z.

g) Bestimmen Sie den Erwartungswert von L_x, indem Sie Auf- und Absteigeoperatoren verwenden und explizit auf die Abbruchbedingungen der Leiteroperatoren achten (für $m = l$ verschwindet $L_+|l,m\rangle$ und für $m = -l$ verschwindet $L_-|l,m\rangle$).