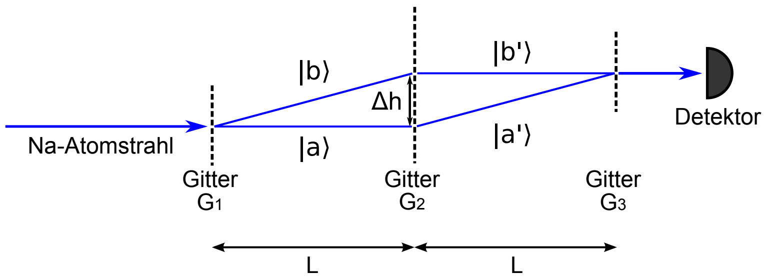
3. Übung zur Vorlesung Atom- und Molekülphysik (E4) SS2021

Prof. H. Weinfurter, Dr. L. Knips

Aufgabe 8 Materiewellen-Interferometrie

Ein Materiewelleninterferometer wird mit einzelnen Natriumatomen der Masse $m = 23\,\mathrm{u}$ betrieben. Die Atome bewegen sich im homogenen Gravitationsfeld der Erde, so dass auf sie das Potential $V = m \cdot g \cdot h$ wirkt. Die mittlere Geschwindigkeit der Atome sei $v_{\mathrm{Na}} = 40\,\mathrm{m/s}$. Als Strahlteiler stehen drei freitragende Gitter mit einer Gitterkonstante von $G = 150\,\mathrm{nm}$ zur Verfügung. Am ersten Gitter G_1 spaltet der Atomstrahl durch Beugung kohärent in zwei Teilstrahlen $|a\rangle$ (0. Beugungsordnung) und $|b\rangle$ (1. Beugungsordnung) auf. Mit Hilfe eines zweiten Beugungsgitters G_2, das sich im Abstand L hinter dem ersten Gitter befindet, werden diese beiden Teilstrahlen so gebeugt, dass sie sich am dritten Beugungsgitter G_3 wieder treffen. Das Gravitationsfeld sei so schwach, dass man Pfadlängenänderungen im Interferometer aufgrund der Fallbewegung der Atome vernachlässigen kann.



a) Wozu dient das dritte Gitter G_3?

b) Wie groß muss der Abstand L zwischen dem ersten und dem zweiten Gitter gewählt werden, damit die beiden Teilstrahlen $|a\rangle$ und $|b\rangle$ am zweiten Gitter eine Höhendifferenz Δh von $2\,\mathrm{mm}$ haben?

c) Berechnen Sie die Differenz $\Delta\lambda$ der de Broglie-Wellenlängen von Atomen in Teilarmen $|a\rangle$ und $|b'\rangle$. *Hinweis:* die Differenz ist klein, benutzen Sie eine geeignete Näherung.

d) Bestimmen Sie die volle Phasendifferenz $\Delta\phi$ der am dritten Gitter interferierenden Pfade $|a'\rangle$ und $|b'\rangle$. *Hinweis:* Für kleine Gravitationsfelder liefern die Pfade $|a'\rangle$ und $|b\rangle$ denselben Beitrag zu $\Delta\phi$, also $\Delta\phi = (\phi_b + \phi_{b'}) - (\phi_a + \phi_{a'}) = \phi_{b'} - \phi_a$.

e) Wir wollen nun die Empfindlichkeit des Interferometers verbessern. Wie schnell oder langsam müssen die Natriumatome sein, damit eine Änderungen der Erdbeschleunigung von $\Delta g = 2.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m/s^2}$ einer Phase von π entspricht? Wie lässt sich ansonsten das Interferometer verändern, um die Empfindlichkeit weiter zu steigern?

Aufgabe 9 Erwartungswerte

Die (eindimensionale) Wellenfunktion $\psi(r)$ eines Teilchens sei gegeben durch

$$\psi(r) = N \frac{e^{ip_0 r/\hbar}}{\sqrt{a^2 + r^2}},$$

wobei a, p_0 reelle Parameter sind und N die Normierungskonstante ist.

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante N.

b) **(optional)** Verwenden Sie ein geeignetes Computerprogramm (Mathematica, Matlab, GNU Octave, Python, etc.) und plotten Sie das Betragsquadrat der Wellenfunktion für $a = 1\,\text{Å}$, $a = 2\,\text{Å}$ und $a = 10\,\text{Å}$ in einem sinnvollen Bereich.

c) Sie messen den Ort r des Teilchens. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man das Teilchen im Intervall $[\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}]$?

d) Berechnen Sie die Erwartungswerte für Ort $\langle r \rangle = \langle \psi | \hat{r} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dr \psi^*(r) r \psi(r)$ und Impuls $\langle p \rangle = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dr \psi^*(r) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial r}\right) \psi(r)$ des Teilchens.

Aufgabe 10 (nur E4) Dichtematrizen

Wir betrachten ein System mit zwei Basiszuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$.

a) Für den Zustand $|\uparrow\rangle$ lautet die Dichtematrix in der Basis $\{|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

$$\rho = |\uparrow\rangle \langle\uparrow| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Geben Sie die Dichtematrizen ρ der folgenden Zustände an:

1. $|\downarrow\rangle$,
2. $\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - i |\downarrow\rangle)$,
3. $\sqrt{\frac{2}{3}} |\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\downarrow\rangle$,
4. ein (inkohärentes) Gemisch aus $\frac{2}{3}$ Anteil $|\uparrow\rangle$ und $\frac{1}{3}$ Anteil $|\downarrow\rangle$.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert des (Pauli-)Operators $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ für die Zustände aus a).

c) Es sei ein unbekannter Zustand ρ gegeben. Bei Messungen in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ erhalten Sie die beiden Ergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit 0.5. Ist der Zustand ρ rein oder gemischt? Welche Messungen könnten ggf. dabei helfen, die beiden Fälle zu unterscheiden?