4. Bewegung im Zentralfeld

4.1. Zweikörperproblem

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad |\vec{r}| = r$$

Schwerpunkts- Relativkoordinaten

$$\Leftrightarrow \quad \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\vec{R}}^{\,2} + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r)$$

$\vec{R}$ zyklisch; $\ddot{\vec{R}} = 0$, $\vec{R}(t)$ gleichförmig, separiert

$\Updownarrow$

Erhaltung des Gesamtimpulses

Def.: $m := \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ <u>reduzierte Masse</u> $\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$

$\Rightarrow$

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r)$$

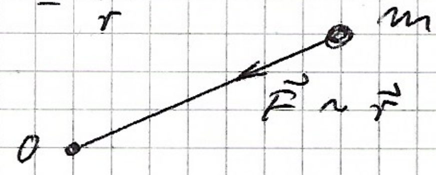
Zweikörperproblem zurückgeführt auf Bewegung <u>eines</u> Teilchens $\vec{r}$ im äußeren Potential $U(r)$

4.2. Lösung der Bewegungsgleichungen

$U(r)$ <u>Zentralfeld</u>

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial \vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r}$$

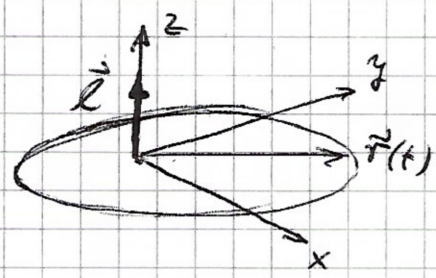
$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} = -\frac{dU}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$



$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r)$ Isotropie → Drehimpulserhaltung (Δ)

$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.}$; mit $\vec{r} \perp \vec{\ell}$

⇒ Bahn $\vec{r}(t)$ verläuft in Ebene



[Falls $\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \vec{r} \parallel \vec{p} \Rightarrow$ geradlinige Bew. durch Zentrum]

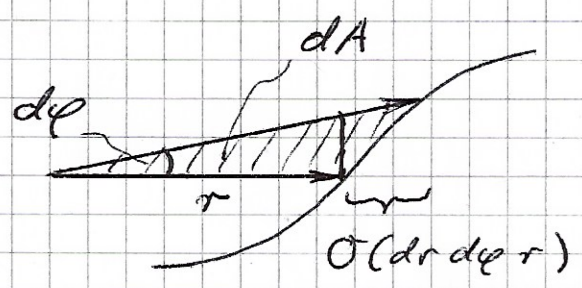
Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = 0$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$$

φ zyklisch $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \ell_z = \ell = \text{const.} \leftrightarrow (\Delta)$ ✓

Bemerkung:

Fläche $dA = \frac{1}{2} r \cdot r\, d\varphi$



$$\Rightarrow \dot{A} \equiv \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{\ell}{2m} = \text{const.}$$

$\vec{r}(t)$: in gleichen Zeiten, gleiche Flächen

2. Keplersches Gesetz

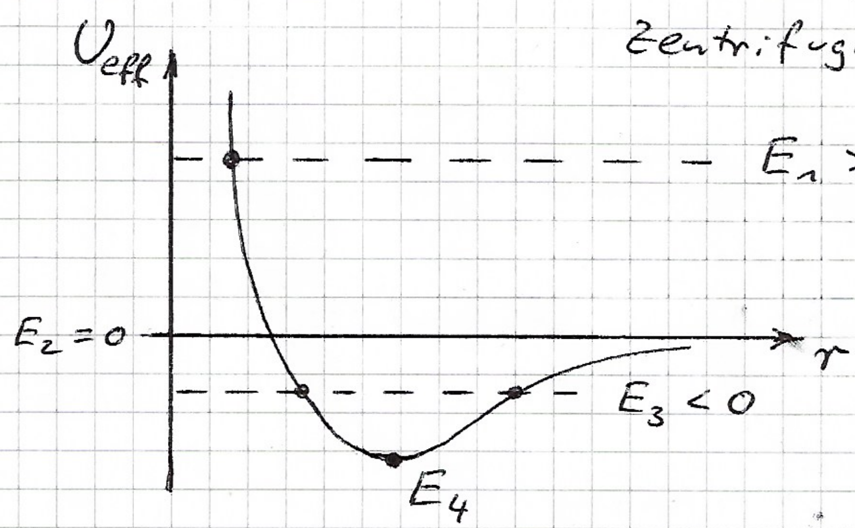
Erste Bewegungsintegrale: $\vec{l}, l$; E $(\partial L/\partial t = 0)$

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) \\ l &= m r^2 \dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)$$

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

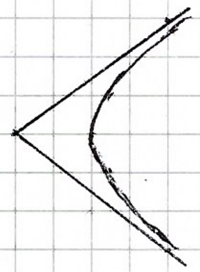
<u>1-dim. Bewegung</u> mit $U_{eff}(r) = U(r) + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2}}_{\text{Zentrifugalpotential}}$

z.B. $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$



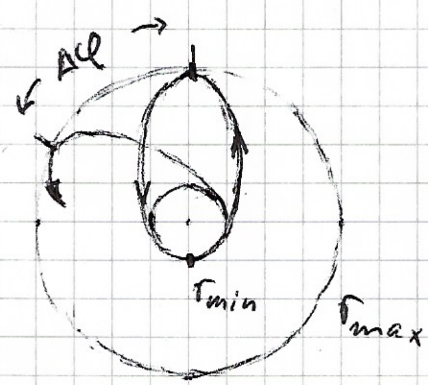
"Umkehrpunkte" $E = U_{eff}(r)$, $\dot{r} = 0$ (aber i.A. $\dot{\varphi} \neq 0$!)

E_1:



infinite Bewegung

E_3:



finite Bew.:

alle Bahnen (E, l beliebig)

geschlossen nur für $U \sim \frac{1}{r}$, $U \sim r^2$

ansonsten Bedingung $\Delta\varphi = 2\pi \frac{k}{n}$ $k, n \in \mathbb{Z}$

E_4: $r = $ const. $\rightarrow$ Kreisbahn

Integration von

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \qquad \ell = m r^2 \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{\ell^2}{m^2 r^2}}} \qquad d\varphi = \frac{\ell}{m r^2}\, dt$$

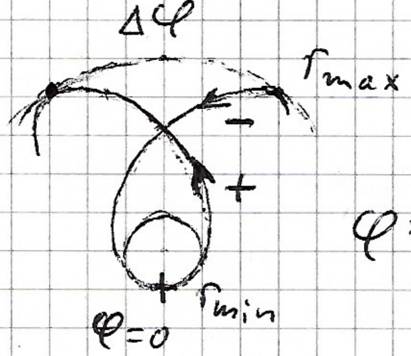
$\hookrightarrow \; r(t)$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ $\varphi(t)$, monoton

Bahn: $\quad r = r(\varphi)$ aus

$$\varphi = \pm \int \frac{\frac{\ell}{r^2}\, dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{\ell^2}{r^2}}} + \text{const.}$$

allg. Lösung; Problem reduziert auf Quadraturen

Vorzeichenwechsel in Umkehrpunkten



Abschnitte symmetrisch (unter $\varphi \leftrightarrow -\varphi$)

$$\varphi = \pm \int_{r_{min}}^{r} f(r')\, dr'$$

$\Rightarrow$ Abschnitt $[r_{min} \to r_{max}] \rightsquigarrow$ ganze Bahn

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} f(r)\, dr \pmod{2\pi} \qquad f(r) = \frac{\frac{\ell}{r^2}}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{\ell^2}{r^2}}}$$