$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x,\dot{x},t) \quad , \; L = T - U \qquad \underline{\delta S \overset{!}{=} 0}$$

<u>allgemein:</u> System von N Massenpunkten, Potential U

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$$

$$\text{ELG}: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \quad \Leftrightarrow \quad m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

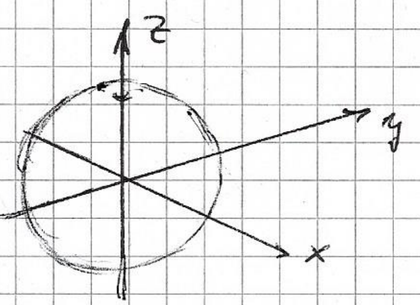
generalisierte Koordinaten

$q_1, q_2, \dots, q_s$ $\quad$ s unabh. Größen, die die Lage des Systems vollständig beschreiben

Beziehung zu kartesischen Koordinaten

$r_{ij} = r_{ij}(q_1, \dots, q_s, t)$ $\quad i = 1, \dots, N; \; j = 1,2,3$: $3N - s$ Zwangsbed.

z.B.



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$x = R \sin\vartheta \cos\varphi$ $\qquad q_1 = \varphi$

$y = R \sin\vartheta \sin\varphi$ $\qquad q_2 = \vartheta$

$z = R \cos\vartheta$

Lagrange-Formalismus (allg.) $\quad L = T - U$

$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_i, \dot{q}_i, t)$,

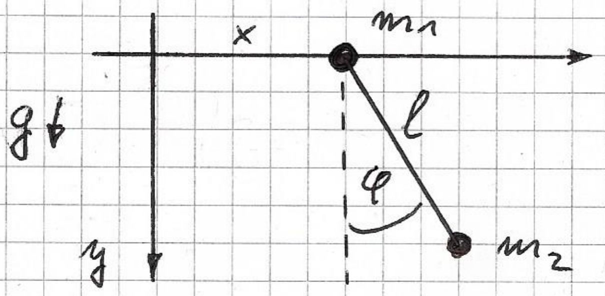
$q_i(t_1), q_i(t_2)$ fest

$$\boxed{\delta S = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$$

Vorteile einer Formulierung durch ein Variationsprinzip

- System beschrieben durch skalare Größe $L = T - U$
- Beschreibung unabh. von Wahl der generalisierten Koord.
- transparente Diskussion von Symmetrien u. Erhaltungssätzen
- Verallgemeinerung auf andere Systeme (Feldtheorie)

Beispiel:



$x_1 = x \qquad y_1 = 0$

$x_2 = x + l \sin\varphi \qquad y_2 = l\cos\varphi$

$(q_1, q_2) = (x, \varphi)$

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot x_1^2 + \dot y_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot x_2^2 + \dot y_2^2\right), \qquad U = -m_2 g y_2$$

$$\dot x_1 = \dot x \qquad \dot x_2 = \dot x + l\cos\varphi\,\dot\varphi \qquad \dot y_2 = -l\sin\varphi\,\dot\varphi$$

$\Rightarrow$

$$L = \frac{m_1+m_2}{2}\dot x^2 + \frac{m_2}{2}\left(l^2\dot\varphi^2 + 2l\dot x\dot\varphi\cos\varphi\right) + m_2 g l\cos\varphi$$

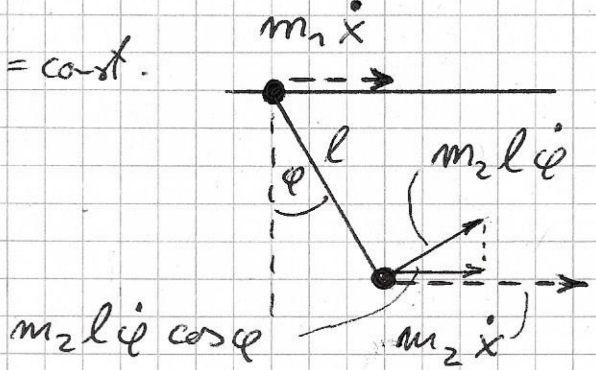
ELG

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x} = (m_1+m_2)\dot x + m_2 l\dot\varphi\cos\varphi \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m_2 l^2\dot\varphi + m_2 l\dot x\cos\varphi \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l\sin\varphi\,(\dot x\dot\varphi + g)$$

$(1) \Rightarrow \quad (m_1+m_2)\dot x + m_2 l\dot\varphi\cos\varphi \equiv p_x = \text{const.}$



$(2) \Rightarrow \quad l\ddot\varphi = -\ddot x\cos\varphi - g\sin\varphi$