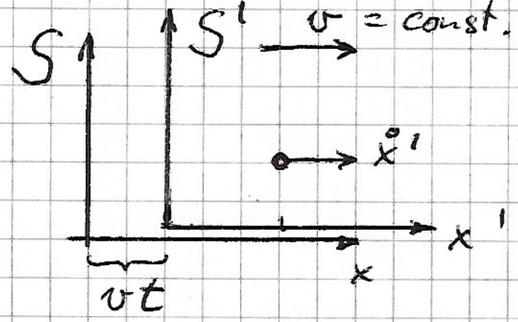
8. Relativistische Mechanik

8.1. Grundbegriffe

Relativitätsprinzip: Naturgesetze forminvariant unter Trafos zwischen Inertialsystemen S und S'



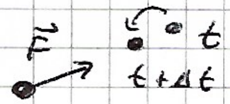
<u>Galilei:</u>

$$t' = t \qquad (1)$$
$$x' = x - vt \qquad (2)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{x} = \dot{x}' + v} \qquad (3)$$

Geschwindigkeitsaddition

Newton: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$



$\Leftrightarrow$ Fernwirkung,

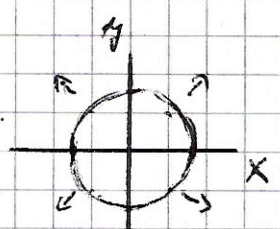
nur näherungsweise gültig:

Es gibt eine maximale Geschwindigkeit d. Wirkungsausbreitung $\equiv$ Lichtgeschwindigkeit $\underline{c = 3 \cdot 10^8 \, m/s}$

→ Widerspruch zu (3) → Aufgabe von (1), Modifikation von (2)

→ <u>spezielle RT</u>:
- Relativitätsprinzip
- c unabhängig vom Inertialsystem

Lichtsignal in S



$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \underline{c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0}$$

Kegel im 4-dim. Raum (ct, x, y, z) <u>Lichtkegel</u>

Analog in S', $c^2 t'^2 - x'^2 \stackrel{!}{=} c^2 t^2 - x^2$ für $y' = y$, $z' = z$

Wahl der Einheiten so, dass z.B. t, x in "Sekunden" $\boxed{c = 1}$

$$\Rightarrow \quad \underline{t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2}$$

Ansatz: lineare Trafo $\quad t' = At + Bx$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x' = Ct + Dx$

$$\Rightarrow \quad A^2t^2 + 2ABtx + B^2x^2 - C^2t^2 - 2CDtx - D^2x^2 = t^2 - x^2$$

$\underline{\forall\, t, x} \quad \Rightarrow \quad A^2 - C^2 = 1, \quad D^2 - B^2 = 1, \quad AB = CD$

3 Gln., 4 Unbekannte $\Rightarrow$ 1 freier Parameter, o.B.d.A. $\underline{C \equiv -\operatorname{sh}\eta}$

$$\Rightarrow \quad A^2 = 1 + \operatorname{sh}^2\eta \quad \Rightarrow \quad \underline{A = \operatorname{ch}\eta}$$

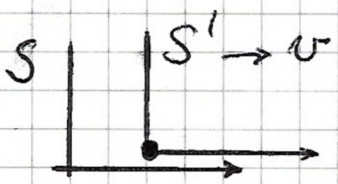
$$\Rightarrow \quad B = \frac{C}{A} D = -\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta} D \quad \Rightarrow \quad D^2\left(1 - \frac{\operatorname{sh}^2\eta}{\operatorname{ch}^2\eta}\right) = \frac{D^2}{\operatorname{ch}^2\eta} \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{D = \operatorname{ch}\eta} \qquad \Rightarrow \quad \underline{B = -\operatorname{sh}\eta}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\eta & -\operatorname{sh}\eta \\ -\operatorname{sh}\eta & \operatorname{ch}\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

<u>Lorentz-Transformation</u>

Boost in x-Richtung



Ursprung von S': Geschw. v in S

$$x' = 0 = -\operatorname{sh}\eta\, t + \operatorname{ch}\eta\, x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta} = \operatorname{th}\eta \equiv v \equiv \beta \quad \left(= \frac{v}{c}\right)$$

$$\boxed{\eta = \operatorname{arth} v}$$

v Geschwindigkeit

η Rapidität

$$\Rightarrow \quad \operatorname{ch}\eta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} =: \gamma \qquad \operatorname{sh}\eta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\beta$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \qquad y' = y \qquad z' = z$$

- vergleiche:

Boost: $\Lambda(\eta) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\eta & -\operatorname{sh}\eta \\ -\operatorname{sh}\eta & \operatorname{ch}\eta \end{pmatrix}$ Drehung: $A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

invariant: $t^2 - x^2$ $x^2 + y^2$

Minkowski-Abstand euklidischer Abstand

- 2 Boosts: $\Lambda(\eta_1)\,\Lambda(\eta_2) = \Lambda(\eta_1 + \eta_2)$

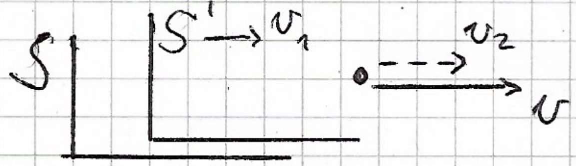
  $\rightarrow$ Rapidität <u>additiv</u>

Addition von (parallelen) Geschwindigkeiten:

$$v \equiv \operatorname{th}(\eta_1 + \eta_2) = \frac{\operatorname{th}\eta_1 + \operatorname{th}\eta_2}{1 + \operatorname{th}\eta_1 \operatorname{th}\eta_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}} \qquad v_1, v_2 \in [0,1] \Rightarrow v \in [0,1]$$

" $0.5 \oplus 0.5 = 0.8$ "



$$v_2 = 1 \Rightarrow v = \frac{v_1 + 1}{1 + v_1} = 1$$

(Invarianz der Lichtgeschwindigkeit)

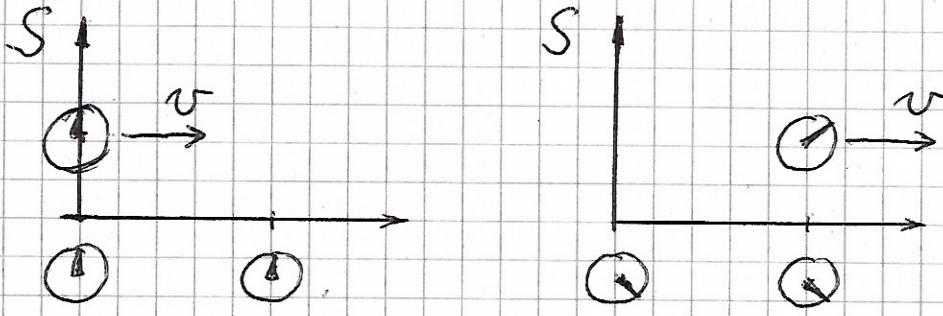
- Nichtrelativistischer Grenzfall $v \ll c$, formal $c \to \infty$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \longrightarrow t' = t$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(x - vt\right) \longrightarrow x' = x - vt$$

<u>Galilei</u> ✓

Zeitdilatation



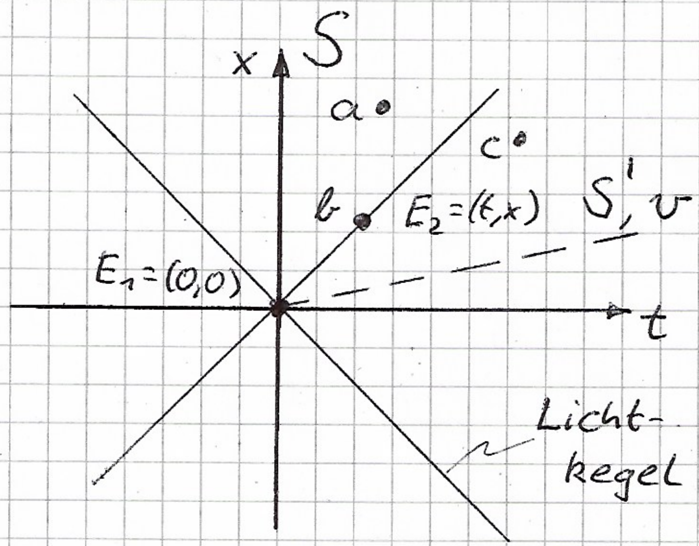
Bewegte Uhr

$x = t = 0 \qquad x' = t' = 0 \qquad t,\ x = vt \qquad x' = 0,\ t' = \gamma(t - vx) =$

$= \gamma(1 - v^2)t$

$\Rightarrow \quad \boxed{t' = \sqrt{1 - v^2}\ t} \quad < t$

Minkowski-Raum



Abstand von E_1 und E_2

$s^2 \equiv (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 =$

$= t^2 - x^2$

$\boxed{\text{Lorentz-invariant}}$

a.) $s^2 < 0$ raumartig

b.) $s^2 = 0$ lichtartig („auf dem Lichtkegel“)

c.) $s^2 > 0$ zeitartig

Raumartiger Abstand,

in S: $E_1 = (0,0)$ $E_2: (\underline{t > 0}, x > t)$

in S': $E_1 = (0,0)$ $E_2: t' = \gamma(t - \beta x) \underline{< 0}$

$\underline{\text{für}}$ $\frac{t}{x} < \beta < 1$

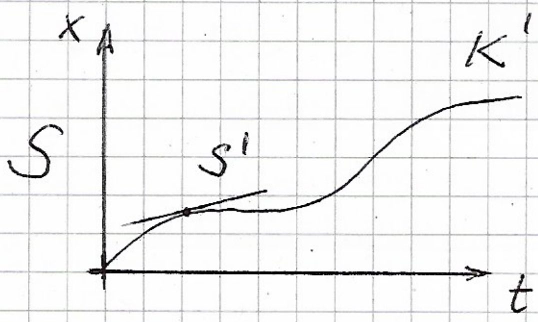
$\Rightarrow$ E_2 <u>nach</u> E_1 in S

E_2 <u>vor</u> E_1 in S'

- Beeinflussung von E_2 durch E_1 unmöglich (Sonst Widerspruch zur <u>Kausalität</u>)
- Signal von $E_1 \to E_2$ entspräche $v = \frac{x}{t} > 1$

$\Rightarrow$ Unmöglichkeit von Überlichtgeschwindigkeit

Eigenzeit



v konstant: $t' = \sqrt{1-v^2}\, t$

$v = v(t)$: $dt' = \sqrt{1 - v^2(t)}\, dt \equiv d\tau$

K' i.a. kein Inertialsystem!

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2(t)}\, dt \leq t_2 - t_1$$

Zeit auf bewegter Uhr, ausgedrückt durch Zeit im ruhenden Syst. S

- $d\tau = \sqrt{1 - v^2}\, dt$ <u>Lorentz-invariant</u>

a.) aus Definition

b.) $s^2 = (t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2$ invariant

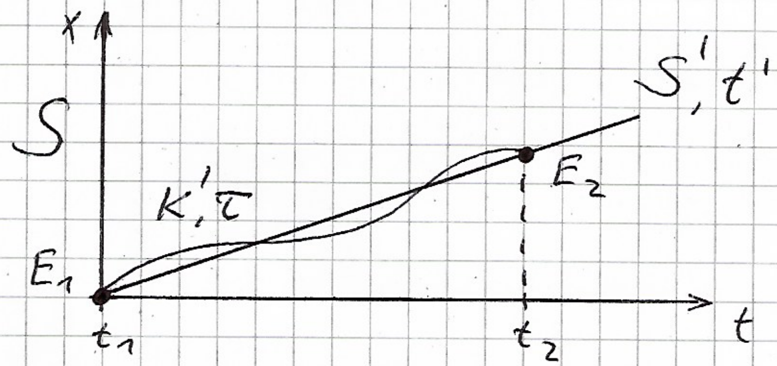
$\Rightarrow$ $(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$ invariant

$\Rightarrow$ $(ds)^2 = (dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 =$

$= (d\tau)^2$ in K' wo $dt' = d\tau$ und $dx' = dy' = dz' = 0$
(mit K' mitbewegte Uhr)

$\Rightarrow$

$$d\tau = ds = dt\sqrt{1-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = dt\sqrt{1-\vec{v}^{\,2}} \equiv \underline{dt\sqrt{1-v^2}}$$



Bewegung zwischen E_1 und E_2

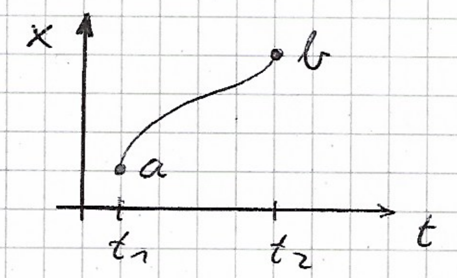
$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1'}^{t_2'} \sqrt{1 - v'^2(t')}\, dt' \leq t_2' - t_1'$$

K' relativ zu S'

$\Rightarrow$ $\tau_2 - \tau_1$ maximal für $v' \equiv 0$

d.h. für geradlinig gleichförmige Bewegung

8.2. Lagrangefunktion für freies Teilchen



Wirkung S:

Lorentz-invariant

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{v})\, dt = -\alpha \int_a^b d\tau = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\vec{v}^2}\, dt$$

geradlinig gleichförmige Bew. <u>maximiert</u> $\int_a^b d\tau$, <u>minimiert</u> S

$$\Rightarrow \quad L = -\alpha \sqrt{1-\vec{v}^2}$$

Limes $|\vec{v}| \ll 1$: $L = -\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \ldots\right) \to \frac{\alpha}{2}\vec{v}^2 \overset{!}{=} \frac{m}{2}\vec{v}^2$

$\Rightarrow \alpha = m$

$$\boxed{L = -m\sqrt{1-\vec{v}^2}}$$

Impuls: $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = -m \frac{-2\vec{v}}{2\sqrt{1-\vec{v}^2}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}$

ELG: ($\vec{x}$ zyklisch) $\frac{d}{dt}\vec{p} = 0 \iff \vec{v} = \text{const.}$

Energie:

$$E = \vec{v}\cdot\vec{p} - L = \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} + m\frac{1-\vec{v}^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = \sqrt{m^2+\vec{p}^2}$$

relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$|\vec{v}| \ll 1$: $E = m\left(1 + \frac{1}{2}\vec{v}^2\right) = m + \frac{m}{2}\vec{v}^2$

$\vec{v} = 0$: $\boxed{E = m}$ (Ruheenergie)

„Äquivalenz von Masse und Energie"