4. Zeitentwicklung als kanonische Transformation

$$Q_i(t) := q_i(t+\tau) = Q_i(q(t), p(t); \tau)$$

$$\mathcal{P}_i(t) := p_i(t+\tau) = \mathcal{P}_i(q(t), p(t); \tau)$$

wobei $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $H = H(p,q)$

Wirkung $S[q(t'); t+\tau, t] := \int_t^{t+\tau} L(q(t'), \dot{q}(t'), t')\, dt'$

<u>Funktional</u>, $q(t')$ beliebig

Betrachte $S[q_{ELG}(t'); t+\tau, t] =: \sigma(q(t), q(t+\tau), t)$

Lösung der Bew.gln. — <u>Funktion</u> von $q(t), q(t+\tau), t$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_t^{t+\tau} dt'\, L(t') = L(t+\tau) - L(t) =$$

$$= p_i(t+\tau)\,\dot{q}_i(t+\tau) - H(t+\tau) - p_i(t)\,\dot{q}_i(t) + H(t) =$$

$$= \mathcal{P}_i \dot{Q}_i - H' - p_i \dot{q}_i + H$$

wobei $H(t) \equiv H(p(t), q(t), t)$ $\quad H'(t) = H(\mathcal{P}(t), Q(t), t+\tau)$

$\Leftrightarrow$ Bedingung für kanonische Transformation mit

$F(q, Q, t) = -\sigma(q, Q, t)$ als Erzeugender

$$p_i = -\frac{\partial \sigma}{\partial q_i} \qquad \mathcal{P}_i = \frac{\partial \sigma}{\partial Q_i} \qquad H' = H - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} q_i(t) \\ p_i(t) \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} Q_i(t) = q_i(t+\tau) \\ \mathcal{P}_i(t) = p_i(t+\tau) \end{matrix}\right.$$ ist kanonische Transformation

7.4. Phasenraum, Liouvillescher Satz

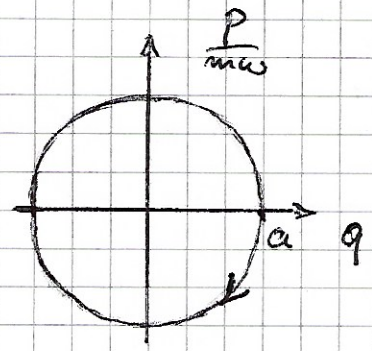
Koord., Impulse $\quad q_i, p_i \quad i = 1, \dots, s$

bilden den $2s$-dimensionalen <u>Phasenraum</u>

<u>Beispiel:</u> Oszillator $q(t) = a \cos\omega t$

$p(t) = m\dot{q}(t) = -ma\omega \sin\omega t$

Phasenraum-Trajektorie, Kreis mit Radius a



Volumenelement $\quad d\Gamma = dq_1 \dots dq_s \, dp_1 \dots dp_s$
ist invariant unter kanonischen Transformationen

Beweis: $\quad dQ_1 \dots dQ_s \, dP_1 \dots dP_s = D \cdot dq_1 \dots dq_s \, dp_1 \dots dp_s$

mit Funktionaldeterminante

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} =$$

$$= \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s)} \Bigg/ \frac{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s)}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s)}\bigg|_P}_{\left|\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right|_P} \cdot \Bigg[\underbrace{\frac{\partial(p_1, \dots, p_s)}{\partial(P_1, \dots, P_s)}}_{\left|\frac{\partial p_i}{\partial P_k}\right|_q} \Bigg]_q^{-1}$$

Erzeugende $\Phi(q, P, t)$: $\qquad p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}$

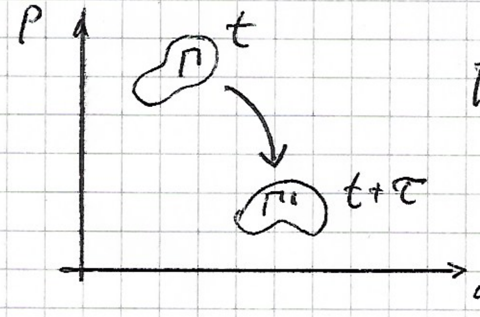
$$\Rightarrow \left|\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right|_P = \left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_k \, \partial P_i}\right| = \left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_k \, \partial q_i}\right| = \left|\frac{\partial p_i}{\partial P_k}\right|_q \Rightarrow \underline{\underline{D = 1}}$$

$\blacksquare$

- Phasenraumvolumenelement $d\Gamma$ invariant unter Kanon. Trafo
- Zeitentwicklung eines Systems $q(t), p(t) \rightarrow q(t+\tau), p(t+\tau)$ entspricht einer kanonischen Transformation (siehe 7.3., Beispiel 4.)

$\Rightarrow$ <u>Liouvillescher Satz</u> :

Phasenraumvolumen ist invariant unter Zeitentwicklung



$$\Gamma' = \Gamma$$