5.2. Gedämpfte Schwingungen

__Reibung__ $\leftrightarrow$ Bewegung im Medium!

$$\text{(Mechanische) Energie} \xrightarrow[\text{Dissipation}]{} \text{Wärme}$$

Wärme: Verteilung von Energie auf __sehr__ große Zahl von Freiheitsgraden, statistische Beschreibung

$\rightarrow$ Reibung kein rein mechanisches Problem!

Näherungsweise Beschreibung:

Reibungskraft $f_R = -\alpha \dot{x}, \quad \alpha > 0$

homogenes Medium $\frac{\partial f_R}{\partial x} = 0$

$$f_R = f_R(\dot{x}) = \underset{=0}{f_R(0)} + \underbrace{f_R'(0)\cdot \dot{x}}_{=-\alpha\dot{x}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} f_R''(0)\cdot \dot{x}^2 + \dots}_{\substack{\text{vernachlässigbar} \\ \text{falls } \dot{x} \text{ klein}}}$$

Def.: Dissipationsfunktion $\boxed{W := \frac{1}{2}\alpha \dot{x}^2}$

$$\Rightarrow f_R = -\frac{\partial W}{\partial \dot{x}} = -\alpha \dot{x}$$

Vorschrift $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x}}_{\text{Kraft}} - \underbrace{\frac{\partial W}{\partial \dot{x}}}_{\substack{\text{Reibungskraft} \\ \text{(Zusatzterm)}}}$

$L = L(x, \dot{x})$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L\right) = \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} - \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} =$$

$$= \dot{x}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\dot{x}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}} = -\alpha \dot{x}^2 = \underline{-2W}$$

$W > 0 \leftrightarrow dE/dt < 0$: Rate der Energiedissipation

Oszillator mit Reibung

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \gamma = \frac{\alpha}{m}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{DGL, linear, homogen}$$

Ansatz: $x \sim e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

allg. Lösung: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

<u>Fälle:</u>

a.) $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$, $\quad \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}}_{\text{reell}}$

$$\Rightarrow x(t) = a\, e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\Big(\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\tfrac{\gamma}{2}\right)^2}}_{\omega}\, t + \beta\Big)$$

gedämpfte Schwingung

b.) $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$

$$x(t) = C_1 e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

aperiodische Bewegung $\quad x(t)$ monoton $\to 0$

c.) $\frac{\gamma}{2} = \omega_0 \quad$ aperiodischer Grenzfall $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2}$

allg. Lösung $\quad x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$

Bem. zu c_1

2 Lösungen $\quad c_1 e^{\lambda_1 t} \to c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$

$$c_2 \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \xrightarrow{\lambda_2 \to \lambda_1} c_2 \frac{d e^{\lambda_1 t}}{d\lambda_1} = c_2 t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

Erzwungene Schwingung mit Reibung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = b \cos \Omega t \to \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = b e^{i\Omega t}$$

spezielle Lösung: $\quad x(t) = \mathcal{C} e^{i\Omega t}$

$$\Rightarrow (-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega_0^2)\mathcal{C} e^{i\Omega t} = b e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \frac{b}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega} = b \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - i\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2} = c e^{i\delta}$$

wobei

$$c = \frac{b}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}} \qquad \tan\delta = \frac{\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

allg. Lösung (für $\omega_0 > \gamma/2$)

$$x(t) = a e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \beta) + c \cos(\Omega t + \delta)$$

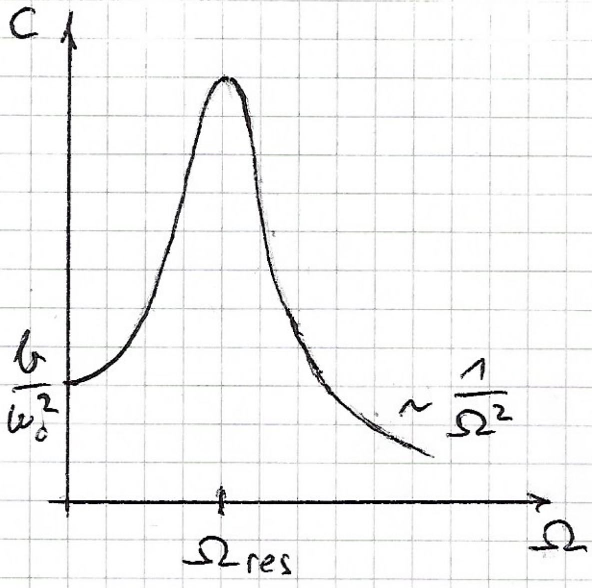
für $t \gg \frac{1}{\gamma}$ $\qquad x(t) = c \cos(\Omega t + \delta)$

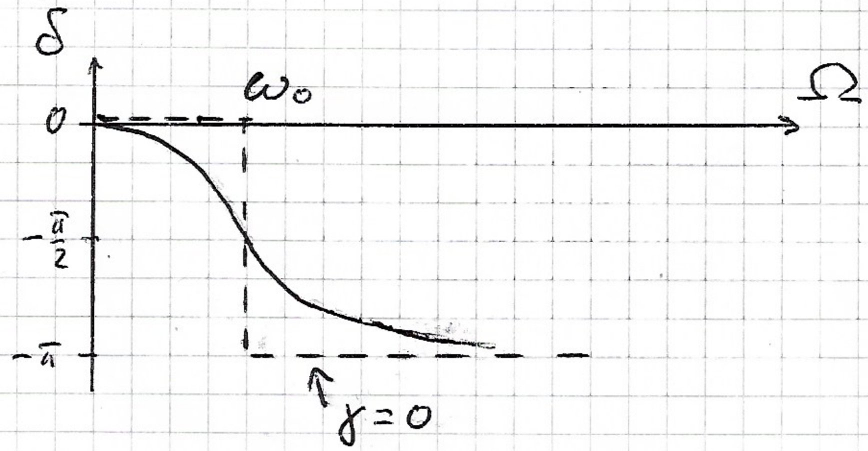
- Amplitude $c = \frac{b}{\gamma\omega_0}$ für $\Omega = \omega_0$, <u>endlich</u>

c maximal für $\Omega = \Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\gamma^2}$

- Phasenverschiebung

Ω	0	ω_0	$\gg \omega_0$
c	$\frac{b}{\omega_0^2}$	$-i\,\frac{b}{\gamma\omega_0}$	$-\frac{b}{\Omega^2}$
δ	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$





- Energiezufuhr

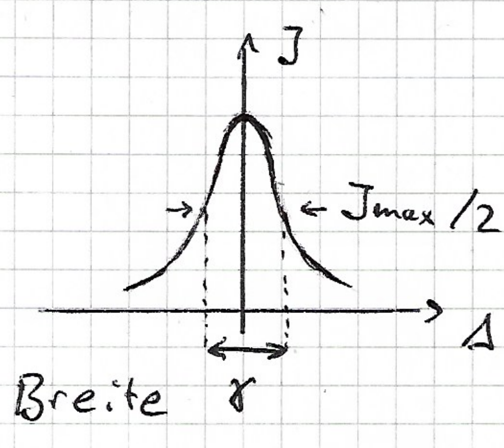
$$2W = \alpha \dot{x}^2 = \alpha c^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \delta)$$

$$\Rightarrow \quad J := 2\overline{W} = \frac{1}{2}\alpha c^2 \Omega^2 = \frac{1}{2}\gamma m \frac{b^2\Omega^2}{(\Omega^2-\omega_0^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}$$

$$\Omega - \omega_0 \equiv \Delta \,, \quad \Delta \ll \omega_0 \,, \quad \gamma \ll \omega_0$$

$$\Rightarrow \quad J = \frac{mb^2}{4} \frac{\frac{\gamma}{2}}{\Delta^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

Resonanzkurve



5.3. Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

$L = T - U$ Koordinaten $q_i \quad i = 1, \dots, n$

$$U(q_k) = \underbrace{U(q_k^0)}_{\text{(irrelevant)}} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial q_i}\bigg|_{q_i^0}}_{=0} \cdot (q_i - q_i^0) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\bigg|_{q_i^0}}_{K_{ij}} (q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0) + \dots$$

- Gleichgewichtslage $q_i = q_i^0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial q_i}\Big|_{q_i^0} = 0$
- quadratische Näherung $\Rightarrow U = \frac{1}{2} K_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$ $\quad \boxed{x_i = q_i - q_i^0}$
- $T = \frac{1}{2} a_{ij}(q_k)\, \dot{q}_i \dot{q}_j \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{2} M_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$
- Summenkonvention $\quad K_{ij} x_i x_j \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_i x_j$

  Matrixschreibweise $\quad x_i K_{ij} x_j = \vec{x}^T K \vec{x}$

  z.B. $n = 2$: $K_{ij} x_i x_j = K_{11} x_1 x_1 + K_{12} x_1 x_2 + K_{21} x_2 x_1 + K_{22} x_2 x_2 =$

$$= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} K_{ij} x_i x_j}$$

- M, K symmetrisch $M_{ij} = M_{ji}$, $K_{ij} = K_{ji}$ o.B.d.A.

  z.B. $\tilde{K}_{12} x_1 x_2 + \tilde{K}_{21} x_2 x_1 = \underbrace{\frac{1}{2}(\tilde{K}_{12} + \tilde{K}_{21})}_{=: K_{12} = K_{21}} (x_1 x_2 + x_2 x_1)$

- M positiv definit: $\vec{v}^T M \vec{v} \geq 0 \quad (= 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0)$

  K positiv semidefinit: $\vec{x}^T K \vec{x} \geq 0 \quad (\vec{x} = 0$ nicht instabil$)$

ELG: $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0 \qquad k = 1, \dots, n$$

$$\partial x_i / \partial x_k = \delta_{ik}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} K_{ij} x_i x_j = K_{ij}(\delta_{ik} x_j + x_i \delta_{jk}) = K_{kj} x_j + \underbrace{K_{ik} x_i}_{K_{ki} x_i} = 2 K_{kj} x_j$$

$$\Rightarrow \quad \underline{M_{kj} \ddot{x}_j + K_{kj} x_j = 0}$$

Ansatz $\quad x_j = a_j e^{i\omega t}, \qquad \ddot{x}_j = -\omega^2 a_j e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \quad (K_{kj} - \omega^2 M_{kj})\, a_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (K - \omega^2 M)\vec{a} = 0 \qquad \left[\Leftrightarrow (M^{-1}K)\vec{a} = \omega^2 \vec{a}\right]$$

Eigenwertproblem

charakteristisches Polynom $\quad \det(K - \omega^2 M) = 0$

$\Rightarrow$ n Lösungen $\quad \omega_\ell$ Eigenwerte $\quad \ell = 1, \dots, n$

$\vec{a}^{(\ell)}$ Eigenvektoren

Matrix $$A_{j\ell} = a_j^{(\ell)} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \dots \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

allg. Lsg. der ELG: $$x_j(t) = \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell\, a_j^{(\ell)} \cos(\omega_\ell t + \alpha_\ell)$$

$2n$ freie Parameter: c_ℓ, α_ℓ