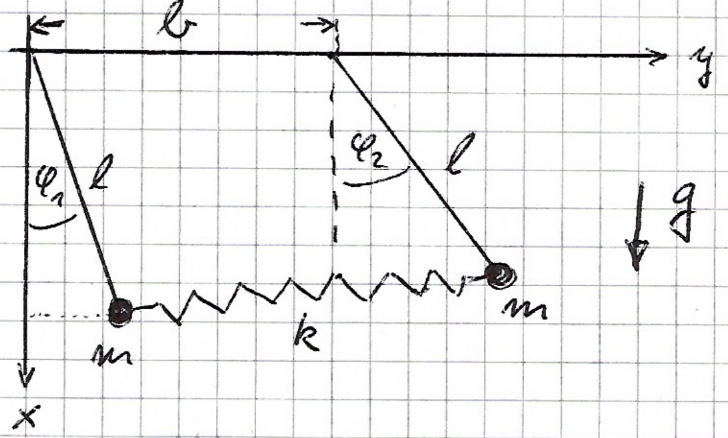
Gekoppelte Pendel



generalisierte Koord.:

φ_1, φ_2

a.) $T = \frac{ml^2}{2}(\dot{\varphi}_1^{\,2} + \dot{\varphi}_2^{\,2})$

b.) Positionen der Massen $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ in φ_1, φ_2?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\cos\varphi_1 \\ l\sin\varphi_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\cos\varphi_2 \\ b + l\sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$

c.) Wie lautet die pot. Energie U in Kartesischen Koord.?
(Die Gleichgewichtslänge der Feder sei b)

$$U = -mgx_1 - mgx_2 + \frac{k}{2}s^2$$

wobei $\quad s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - b$

d.) Entwickle U bis zur 2. Ordnung in φ_1, φ_2.

$$x_1 \doteq l(1 - \tfrac{1}{2}\varphi_1^2), \quad x_2 \doteq l(1 - \tfrac{1}{2}\varphi_2^2), \quad x_2 - x_1 = \frac{l}{2}(\varphi_1^2 - \varphi_2^2) = \\ = \mathcal{O}(\varphi_i^2)$$

$$s(\varphi_1 = \varphi_2 = 0) = 0$$

$$s \doteq \sqrt{(\underbrace{b + l(\varphi_2 - \varphi_1)}_{y_2 - y_1})^2} - b = l(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\Rightarrow \quad U \stackrel{..}{=} \frac{mgl}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{kl^2}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

e.) Wie lautet die Lagrangefunktion in Matrix-Schreibweise ?

$$L = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j - \frac{1}{2} K_{ij} \varphi_i \varphi_j$$

mit $M = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} mgl + kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl + kl^2 \end{pmatrix}$

f.) Bestimme aus der Bewegungsgleichung

$(K - \omega^2 M)\vec{a} = 0$ die Eigenfrequenzen u. Eigenvektoren.

charakteristisches Polynom $\det(K - \omega^2 M) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow (mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2)^2 = k^2 l^4 \Leftrightarrow mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2 = \pm kl^2 \quad / ml^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 = \pm \frac{k}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \mp \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$$

$$K - \omega_1^2 M = \begin{pmatrix} kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & kl^2 \end{pmatrix}, \quad K - \omega_2^2 M = \begin{pmatrix} -kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & -kl^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}^{(1)} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}^{(2)} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

g.) Bestimme $\varphi_{1,2}(t)$ für $\varphi_1(0) = \alpha$, $\varphi_2(0) = \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$

$$\varphi_j = \sum_l a_j^{(l)} c_l \cos(\omega_l t + \alpha_l) = A_{jl} Q_l, \Rightarrow \vec{Q} = A^{-1} \vec{\varphi} \sim \begin{pmatrix} \varphi_1 + \varphi_2 \\ \varphi_1 - \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = \alpha \cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t$$

$$\varphi_2 = \frac{\alpha}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = \alpha \sin\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \sin\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t$$