1. Zeige: $x_j(t) = \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \, a_j^{(\ell)} \cos(\omega_\ell t + \alpha_\ell)$

ist Lösung der Bew.gl. $M_{kj} \ddot{x}_j + K_{kj} x_j = 0$

$$\ddot{x}_j = \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \, (-\omega_\ell^2) \, a_j^{(\ell)} \cos(\omega_\ell t + \alpha_\ell)$$

$$\Rightarrow M_{kj} \ddot{x}_j + K_{kj} x_j = \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \cos(\omega_\ell t + \alpha_\ell) \underbrace{\left[-\omega_\ell^2 M_{kj} a_j^{(\ell)} + K_{kj} a_j^{\ell} \right]}_{(K_{kj} - \omega_\ell^2 M_{kj}) \, a_j^{(\ell)} = 0} \equiv 0$$

2. Erzwungene Schwingung mit Reibung

$x(t) = c \cos(\Omega t + \delta)$,

$$c = \frac{b}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}} \; ; \quad c^2 = \frac{b^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}$$

Bei welcher Frequenz Ω_{res} wird c maximal?

a) Maximum von $c(\Omega)$ äquivalent zu Max. von $c^2(\Omega^2)$

$$\frac{\partial c}{\partial \Omega} = \frac{\partial c}{\partial \Omega^2} 2\Omega \Rightarrow \frac{\partial c^2}{\partial \Omega^2} = 2c \frac{\partial c}{\partial \Omega^2} = \frac{c}{\Omega} \frac{\partial c}{\partial \Omega} \quad \square$$

b) Berechne Ω_{res}

$$\frac{\partial c^2}{\partial \Omega^2} = -b^2 \frac{2(\Omega^2 - \omega_0^2) + \gamma^2}{\left((\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2\right)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\Omega = \Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \tfrac{1}{2}\gamma^2}}$$

3. Mittlere Energiezufuhr

$$J \equiv 2\overline{W} = \frac{1}{2}\gamma m \frac{b^2\Omega^2}{(\Omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\Omega^2}$$

a., Für welche Frequenz Ω wird $J(\Omega)$ maximal?

$$\frac{\partial J}{\partial \Omega^2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 = (\Omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\Omega^2 - \Omega^2(2(\Omega^2-\omega_0^2)+\gamma^2) =$$

$$= (\Omega^2-\omega_0^2)\left[\Omega^2-\omega_0^2-2\Omega^2\right] = -(\Omega^2+\omega_0^2)(\Omega^2-\omega_0^2) \Rightarrow \underline{\Omega = \omega_0}$$

b., $\Delta \equiv \Omega - \omega_0$; bestimme Näherung von $J(\Delta)$

für $\Delta \ll \omega_0$, $\gamma \ll \omega_0$, $\gamma \sim \Delta$

$$\Omega^2-\omega_0^2 = (\Omega-\omega_0)(\Omega+\omega_0) \equiv \Delta(2\omega_0+\Delta) = 2\omega_0\Delta + \mathcal{O}(\Delta^2)$$

$$\Rightarrow \quad J = \frac{\gamma m}{2}\frac{b^2\omega_0^2}{4\omega_0^2\Delta^2+\gamma^2\omega_0^2} = \frac{mb^2}{4}\frac{\gamma/2}{\Delta^2+(\gamma/2)^2}$$

4. Aperiodischer Grenzfall: $\ddot{x}+2\omega\dot{x}+\omega^2x=0$

Zeige: $x_1 = e^{-\omega t}$ und $x_2 = te^{-\omega t}$ sind Lösungen

$$\ddot{x}_1+2\omega\dot{x}_1+\omega^2x_1 = e^{-\omega t}(\omega^2-2\omega^2+\omega^2) \equiv 0 \quad ✓$$

$$\dot{x}_2 = e^{-\omega t}-\omega te^{-\omega t} = (1-\omega t)e^{-\omega t}$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega e^{-\omega t}-\omega(1-\omega t)e^{-\omega t} = -\omega(2-\omega t)e^{-\omega t}$$

$$\ddot{x}_2+2\omega\dot{x}_2+\omega^2x_2 = e^{-\omega t}(-2\omega+\omega^2t+2\omega-2\omega^2t+\omega^2t) \equiv 0 \quad ✓$$