1. Teilchen der Masse m im Potential

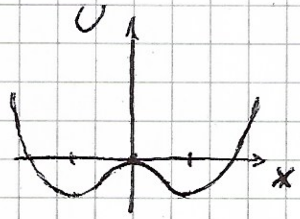
$$U(x) = -\mu x^2 + \lambda x^4 \qquad \mu, \lambda > 0$$

a.) Wo liegen lokale Extrema von U?

b.) Welche sind stabil?

c.) Frequenz der kleinen Schwingungen um stabile Gleichgewichtslagen?

a.) $$U' = -2\mu x + 4\lambda x^3 = -2\mu x\left(1 - \frac{2\lambda}{\mu} x^2\right) \overset{!}{=} 0$$



$$\Leftrightarrow \quad x = 0, \quad x = \pm\sqrt{\frac{\mu}{2\lambda}} \equiv \pm x_0$$

b.) $$U'' = -2\mu + 12\lambda x^2 = \begin{cases} -2\mu < 0, & x = 0 \quad \text{(instabil)} \\ 4\mu > 0, & x^2 = \frac{\mu}{2\lambda} \quad \text{(stabil)} \end{cases}$$

c.) $$U(x) = U(\pm x_0) + U'(x_0)\cdot(x \mp x_0) + \frac{1}{2} U''(x_0)(x \mp x_0)^2 + \ldots$$

$$= -\frac{\mu^2}{4\lambda} + 2\mu (x \mp x_0)^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow k = 4\mu \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{\frac{\mu}{m}}}$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \underbrace{\frac{k}{2}(x - x_0)^2}_{U + \text{const.}}$$

2. Gedämpfter Oszillator $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (1)

a.) Betrachte Grenzfall $\gamma \to 2\omega_0$ der

allg. Lösung: $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, $\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$

Zeige: allg. Lsg. für $\gamma = 2\omega_0$ ist $x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\omega_0 t}$ (2)

Überprüfe (2) durch Einsetzen in (1)

a.) $$x(t) \overset{\rightarrow}{=} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \underset{\rightarrow}{\overset{\lambda_2 \to \lambda_1}{=}} (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_1 t}$$

alternative Darst. d. allg. Lsg. L'Hospital, $\underline{\lambda_1 = -\omega_0}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= c_2 e^{-\omega_0 t} + (c_1 + c_2 t)(-\omega_0) e^{-\omega_0 t} \\ \ddot{x} &= -2\omega_0 c_2 e^{-\omega_0 t} + (c_1 + c_2 t)\omega_0^2 e^{-\omega_0 t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{x} + 2\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x \equiv 0$$

b.) Diskutiere den Grenzfall $\omega_0 = 0$, $\gamma > 0$
(allg. Lsg.; spezielle Lsg. für $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v$)

$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = 0$, $x \sim e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + \gamma\lambda = \lambda(\lambda + \gamma) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\gamma$ $\Rightarrow$ $\underline{x(t) = c_1 + c_2 e^{-\gamma t}}$

$\dot{x} = -\gamma c_2 e^{-\gamma t}$; $\dot{x}(0) = -\gamma c_2 \overset{!}{=} v$, $x(0) = c_1 + c_2 = 0$

$\Rightarrow c_2 = -\frac{v}{\gamma}$, $c_1 = \frac{v}{\gamma}$; $\underline{x(t) = \frac{v}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})}$

"Reichweite": $x(\infty) = \frac{v}{\gamma}$

3. Erzwungene Schwingung mit Dämpfung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = b \cos \Omega t \qquad (3) \qquad b, \Omega \text{ reell}$$

a.) Zeige (durch Einsetzen), dass

$$x(t) = c \cos(\Omega t + \delta) \quad \text{mit } c = \frac{b}{u}, \; u \equiv \sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}$$

$$\cos\delta = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{u}, \quad \sin\delta = -\frac{\gamma\Omega}{u},$$

Lösung von (3) ist.

b.) Für welche Frequenz Ω wird c maximal?

c.) Diskutiere $\delta(\Omega)$ $\quad \Omega \in [0, \infty[$

---

a.) $$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{b}{u}(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t + \delta) - \frac{b}{u}\gamma\Omega \sin(\Omega t + \delta) =$$

$$= b\left(\cos\delta \cos(\Omega t + \delta) + \sin\delta \sin(\Omega t + \delta)\right) =$$

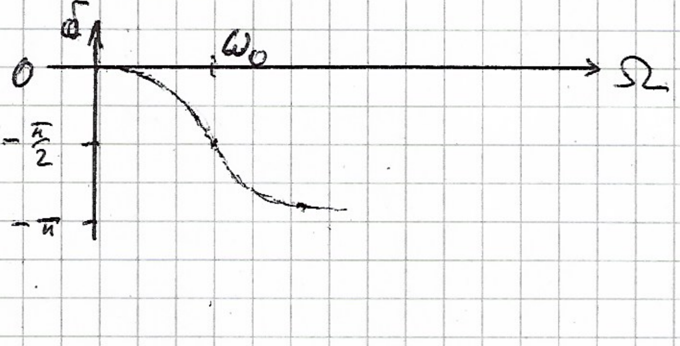
$$= b \cos((\Omega t + \delta) - \delta) = b \cos \Omega t \quad \checkmark$$

b.) $$\frac{d}{d\Omega^2}\left[(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\Omega^2\right] = 2(\Omega^2 - \omega_0^2) + \gamma^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\left(\frac{d}{d\Omega^2}\right)^2 [\ldots] = 2 > 0, \Rightarrow \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \tfrac{1}{2}\gamma^2}$$

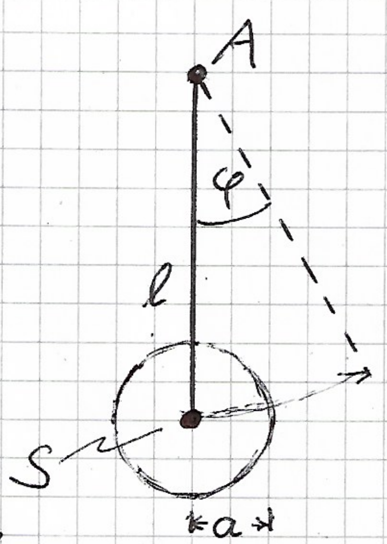
Minimum von u^2
$\hat{=}$ Max. von c

c.)



4. Physikalisches Pendel

homogene Scheibe M, a



a., Trägheitsmomente

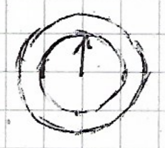
J_S, J (um A) ?

b., Lagrangefunktion ?

c., Frequenz ω kleiner Schwingungen ?

---

a., Steiner: $$J = J_S + Ml^2$$



$$m(r) = M\frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{M}{a^2}r^2 \Rightarrow dm = \frac{2M}{a^2}r\,dr$$

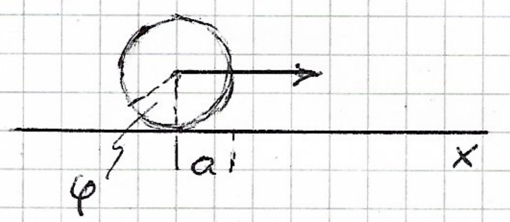
$$\Rightarrow J_S = \int dm\, r^2 = \frac{2M}{a^2}\int_0^a r^3\,dr = \frac{Ma^2}{2}$$

$$\Rightarrow J = M\left(l^2 + \frac{a^2}{2}\right)$$

b., $$L = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - Mgl(1-\cos\varphi) \stackrel{\circ\circ}{=} \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - \frac{Mgl}{2}\varphi^2$$

c., $$\omega^2 = \frac{Mgl}{J} = \frac{gl}{l^2 + \frac{a^2}{2}}$$

5.



Kinetische Energie T

a., Rollen u. reibungsfreies Gleiten

b., Rollen ohne Gleiten

a., $T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{Ma^2}{4}\dot{\varphi}^2$ b., $\dot{x} = a\dot{\varphi}$ $\Rightarrow T = \frac{3}{4}Ma^2\dot{\varphi}^2$