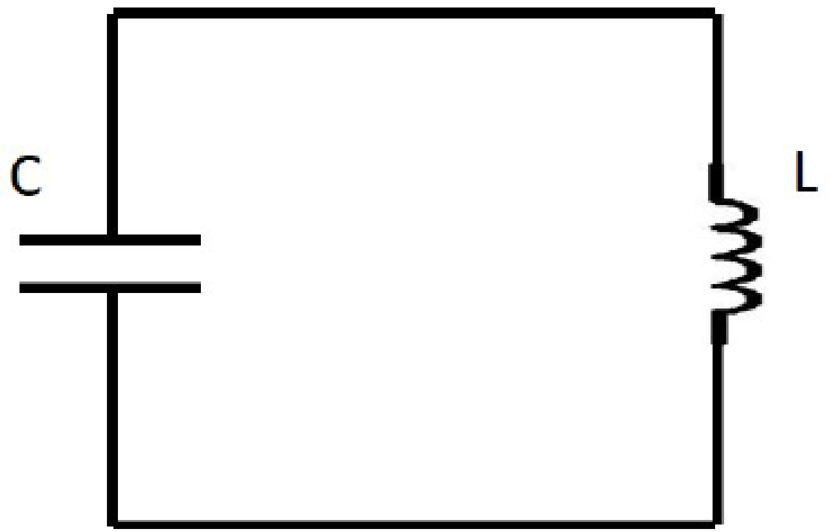
# PN2 – Übung

# **03.07.2020**

## Aufgabe 1

**Schwingkreis.** Der Schwingkreis ist ein wichtiges Bauelement für viele technologische Anwendungen. Im dem dargestellten einfachen, idealen (widerstandsfreien) Fall besteht er aus einer Spule und einem Kondensator.



a) Im Folgenden soll das zeitliche Verhalten von Ladung, Spannung und Strom analysiert werden. Stellen Sie dazu unter Verwendung der Kirchhoffschen Regeln eine Differentialgleichung für den Schwingkreis auf. Lösen Sie die Gleichung mit einem Ansatz der Form $Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ unter der Bedingung, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Ladung im Kondensator maximal ist. Bestimmen Sie insbesondere $\omega_0$.

a) Die definierenden Gleichung lauten $Q = CU$ bzw. $I = C\dot{U}$ für den Kondensator und $U = L\dot{I}$ für die Spule. Daraus ergibt sich gemäß der Maschenregel:

$$U_C + U_L = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{C} + L\dot{I} = \frac{Q}{C} + L\ddot{Q} = 0$$

Diese Differentialgleichung wird wie angegeben mit einem Kosinusansatz gelöst. Mit $Q(t) = Q_0 cos(\omega_0 t)$ folgt:

$$\frac{1}{C}Q(t) - L\omega_0^2 Q(t) = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

wobei $\omega_0$ die Eigen- oder Resonanzfrequenz ist. Für Strom und Spannung folgt somit:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\omega_0 Q_0 sin(\omega_0 t) = -I_0 sin(\omega_0 t)$$

$$U(t) = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C} cos(\omega_0 t) = U_0 cos(\omega_0 t)$$

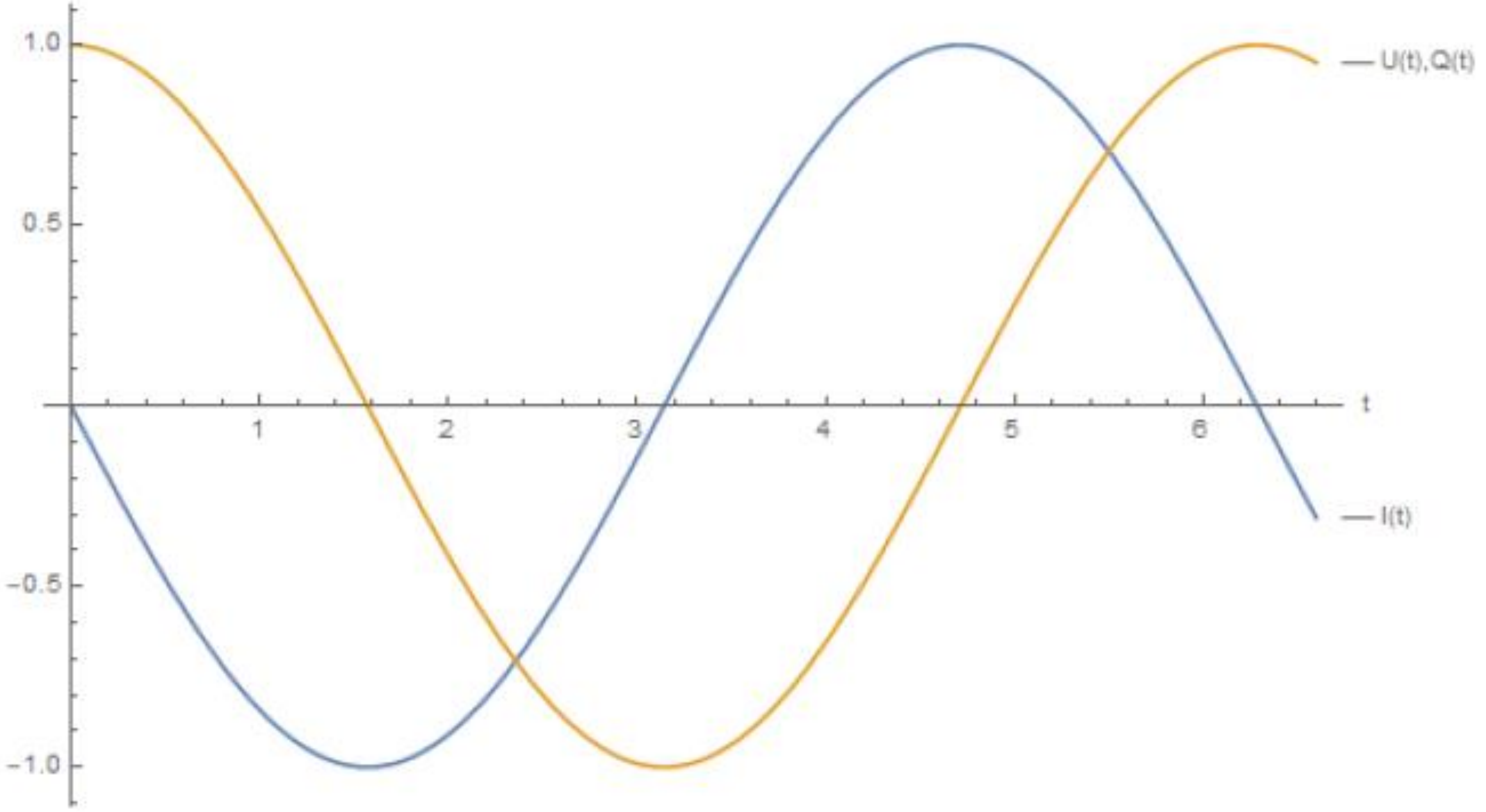
wobei entsprechende Zusammenhänge zwischen $U_0$, $Q_0$ und $I_0$ identifiziert wurden.

b) Skizzieren Sie qualitativ den zeitlichen Verlauf von Ladung, Strom und Spannung. Zu welchen Zeitpunkten befindet sich die gesamte Energie im Kondensator? Wann in der Spule?

b) Für die Skizze wurden alle Variablen / Parameter gleich 1 gesetzt.
Die Zeichnung veranschaulicht, dass Strom und Spannung abwechselnd maximal / minimal sind, nämlich immer genau dann, wenn die andere Größe gerade Null ist. Die gesamte Energie befindet sich dann entweder im Kondensator oder in der Spule.

$$\frac{1}{2}CU^2 = E_{ges} = \frac{1}{2}LI^2$$

Zudem ist die Leistung des Systems zu diesen Zeitpunkten $P = UI = 0$.


1.0
0.5
-0.5
-1.0
1
2
3
4
5
6
t
U(t),Q(t)
I(t)

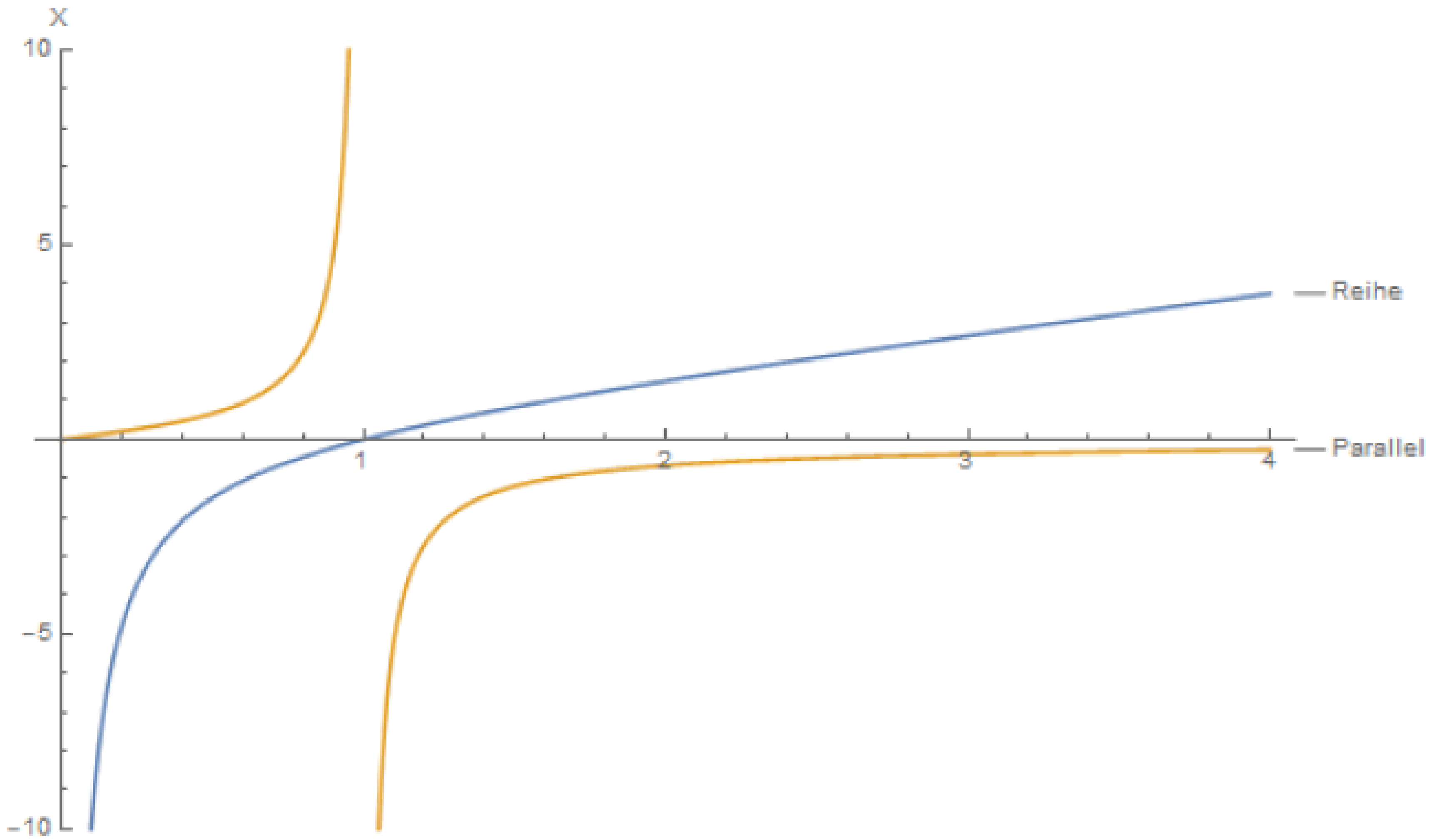
c) Nun sollen der Widerstand einer Reihenschaltung und Parallelschaltung von Kondensator und Spule, ähnlich wie im Schwingkreis, betrachtet werden. Nutzen sie die in der Vorlesung eingeführten Ersatzwiderstände für Spulen und Kondensatoren (kapazitativer Widerstand, induktiver Widerstand) um einen Ausdruck für den Gesamtwiderstand der beiden Schaltungen zu erhalten. Beachten Sie, dass die Widerstände für Spule und Kondensator verschiedene Vorzeichen haben, da der Strom in beiden Bauelementen um insgesamt 180° phasenverschoben ist. Skizzieren Sie den Widerstand als Funktion der Frequenz. Was passiert bei $\omega = \omega_0$?

c) Die Ersatzwiderstände sind $X_L = \omega L$ für die Spule und $X_C = -\frac{1}{\omega C}$ für den Kondensator. Das Minus ist wieder auf gegensätzliche Stromrichtungen zurückzuführen. Damit ergeben sich jeweils:

$$X_{Reihe} = X_L + X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \xrightarrow{\omega \to \omega_0} 0$$

$$X_{Parallel} = \frac{1}{\frac{1}{X_C} + \frac{1}{X_L}} = \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} \xrightarrow{\omega \to \omega_0} \pm\infty$$

Qualitativ ergibt sich folgende Skizze:

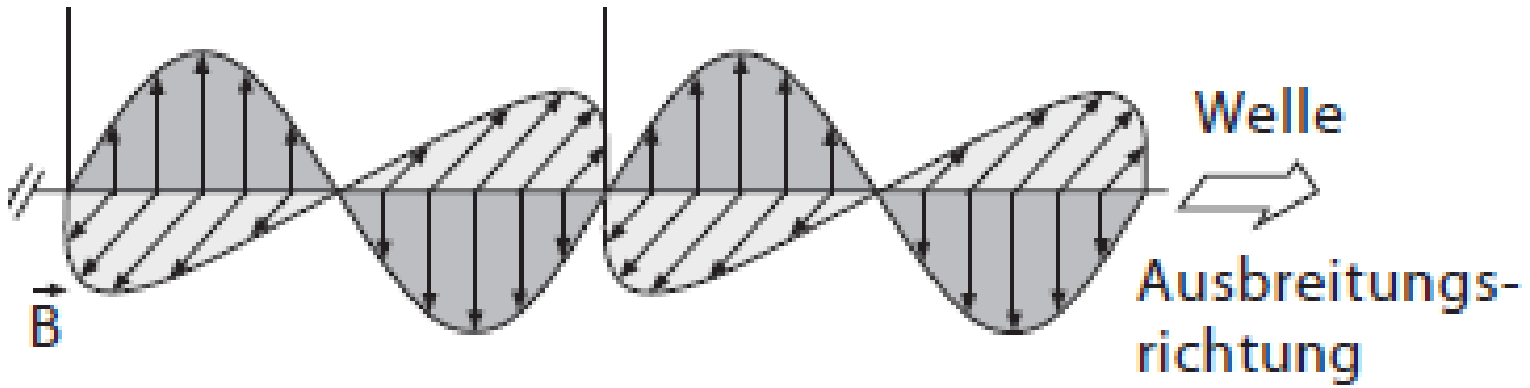


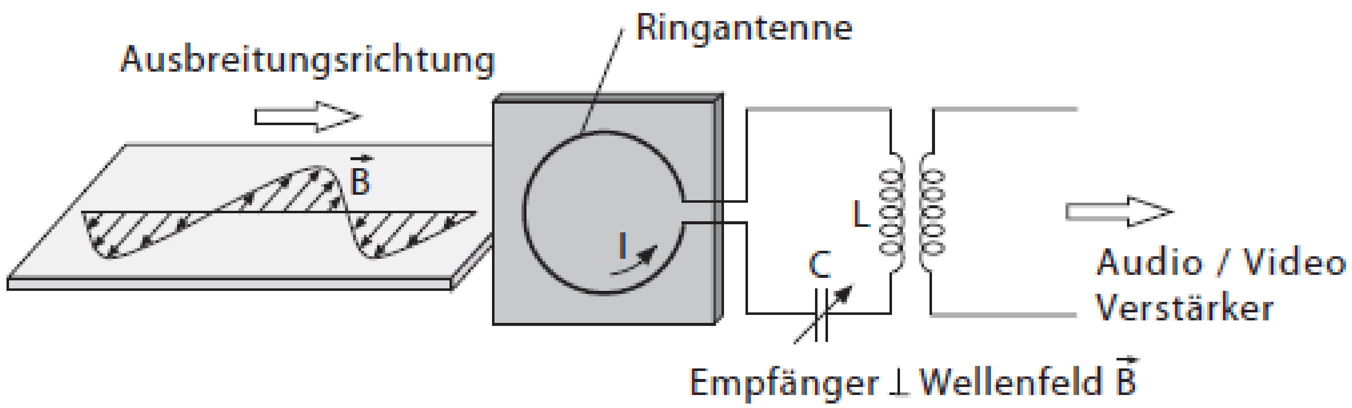
Somit verschwindet im Resonanzfall bei der Reihenschaltung der Widerstand, während er bei der Parallelschaltung unendlich groß wird. Abseits der Resonanz verschwindet der Widerstand bei der Parallelschaltung, im anderen Fall strebt er gegen Unendlich. Dieses gegensätzliche Verhalten macht im Anwendungsfall die beiden Schaltungstypen für verschiedene Anwendungen attraktiv. In der Reihenschaltung dominiert unterhalb der Resonanzfrequenz der Widerstand des Kondensators, oberhalb der der Spule.

## Aufgabe 2

**Radioantenne.** Mit einer Ringantenne, bestehend aus einer Drahtschleife mit Radius 10 cm, soll elektromagnetische Strahlung mit einer effektiven Feldstärke $E_{\mathit{eff}} = 0.15\, V/m$ empfangen werden. Im Falle der Ringantenne erzeugt dabei die magnetische Feldkomponente der elektromagnetischen Strahlung eine Induktionsspannung in der Leiterschleife. Diese kann dann detektiert werden um das Signal zu empfangen. Sie können im Folgenden von einer ebenen elektromagnetischen Welle ausgehen. (**Hinweis:** Der Effektivwert einer Schwingung $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$ ist definiert durch $x_{\mathit{eff}} = x_0/\sqrt{2}$.)

a) Wie muss die Ringantenne zur elektromagnetischen Welle (insbesondere der magnetische Feldkomponente) ausgerichtet sein, damit die induzierte Spannung maximal wird? Finden Sie einen Ausdruck für das Magnetfeld $B(t)$ an der Stelle der Ringantenne! Sie können dabei annehmen, dass die Wellenlänge der elektromagnetischen Strahlung viel größer als die Abmessung der Ringantenne ist (d.h. das Magnetfeld ist homogen über die Fläche der Ringantenne).






a) Die Antenne muss senkrecht zur magnetischen Feldkomponente ausgerichtet werden, da so der magnetische Fluss maximal wird. Damit steht die Antenne parallel zur Ausbreitungsrichtung. Das magnetische Feld ergibt sich dann einfach zu

$$B(t) = B_0 \sin(\omega t + C)$$

wobei $C$ eine Konstante ist.

b) Nehmen Sie an, dass die Antenne wie in a) ausgerichtet ist und dass die elektromagnetische Strahlung mit einer Frequenz von 600 kHz ausgestrahlt wird. Berechnen sie die effektiven Induktionsspannung in der Ringantenne.

b) Die induzierte Spannung in der Leiterschleife ist gegeben durch

$$U_{\mathrm{ind}}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t) = -AB_0\omega\sin(\omega t + C)$$

Mit dem Zusammenhang aus magnetische und elektrischer Feldstärke ergibt sich also

$$U_{\mathrm{ind}}(t) = -A\frac{E_0}{c}\omega\sin(\omega t + C) = -A\frac{\sqrt{2}E_{\mathrm{eff}}}{c}\omega\sin(\omega t + C)$$

Der Effektivwert der induzierten Spannung ist also

$$U_{\mathrm{eff}} = -A\frac{E_{\mathrm{eff}}}{c}\omega = \pi(0.15\,\mathrm{m})^2\frac{0.15\,\mathrm{V\,m^{-1}}}{3\times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}2\pi(6\times 10^5\,\mathrm{Hz}) = 59.2\,\mathrm{\mu V}$$

b) Nehmen Sie an, dass die Antenne wie in a) ausgerichtet ist und dass die elektromagnetische Strahlung mit einer Frequenz von 600 kHz ausgestrahlt wird. Berechnen sie die effektiven Induktionsspannung in der Ringantenne.

b) Die induzierte Spannung in der Leiterschleife ist gegeben durch

$$U_{\mathrm{ind}}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t) = -AB_0\omega\sin(\omega t + C)$$

Energiedichte im elektr. Feld:

$$w_{elek} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Energiedichte im mag. Feld:

$$w_{magn} = \frac{W}{A\ell} = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

$$\Rightarrow \quad w = w_{elek} + w_{magn} = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$