PN2 – Übung

10.07.2020

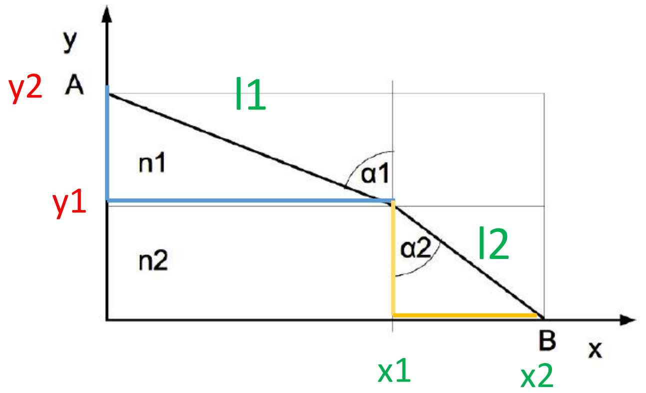
Aufgabe 1

Snellius'schen Brechungsgesetz. Das Snellius'sche Brechungsgesetz (oder einfach nur Brechungsgesetz), beschreibt die Richtungsänderung der Ausbreitungsrichtung einer ebenen Welle beim Übergang in ein anderes Medium. In der folgenden Aufgabe soll das Brechungsgesetz hergeleitet werden.

a) Was besagt das Fermat'sche Prinzip?

Das Fermat'sche Prinzip besagt, dass der Weg welchen das Licht nimmt um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen stets so gewählt wird, dass die benötigte Zeit extremal ist.

b) In der unteren Abbildung ist der Durchgang von Licht durch zwei Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes gezeigt. Leiten Sie nun das Snellius'sche Brechungsgesetz aus den in der Abbildung gezeigten physikalischen Begebenheiten her. Für den optischen Weg den das Licht zurücklegt können sie hierzu den folgenden Ansatz verwenden: $L(AB) = n_1 \cdot l_1 + n_2 \cdot l_2$.



Wir verwenden den Ansatz für die Gesamtlänge des optischen Weges (L(AB)) aus der Angabe und berechnen mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die Strecken l_1 und l_2:

$$
\begin{aligned}
L(AB) =& n_1 l_1 + n_2 l_2 \\
=& n\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + x_1^2} + n_2\sqrt{y_2^2 + (x_2 - x_1)^2}
\end{aligned}
$$

Damit das Fermat'sche Prinzip eingehalten wird muss der optische Weg minimal sein. Wir suchen also das Minimum der Funktion $\mathrm{L}_{AB}(x_1)$. Hierbei ist x_1 unsere einzige Variable.

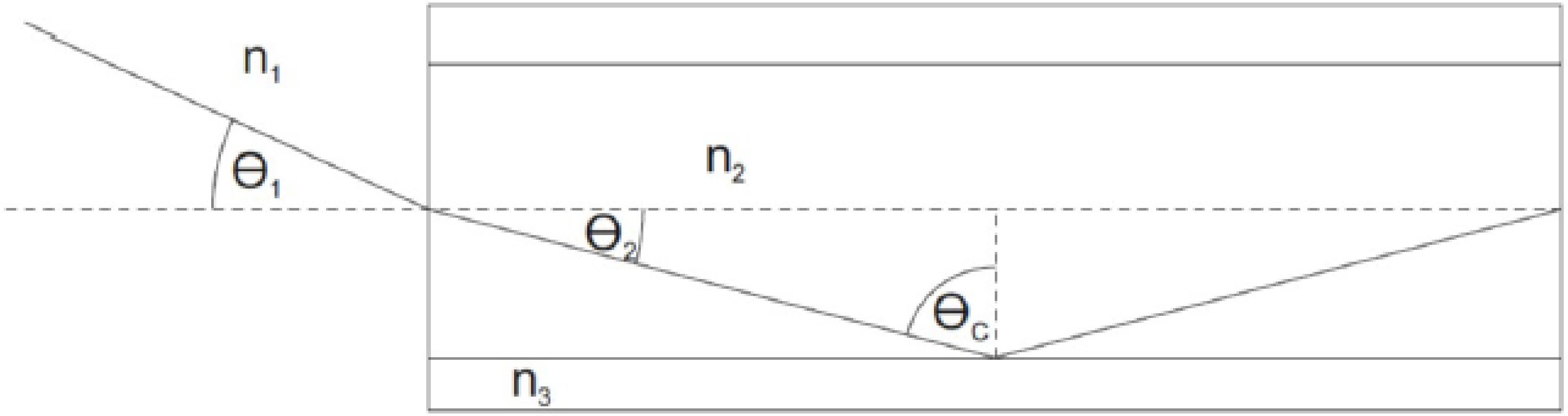
$$\frac{dL(AB)}{dx_1} = \frac{1}{2}\frac{n_1 2x_1}{\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + x_1^2}} - \frac{1}{2}\frac{n_2 2(x_2 - x_1)}{\sqrt{y_2^2 + (x_2 - x_1)^2}}$$

$$\frac{dL(AB)}{dx_1} = n_1 \sin(\alpha_1) - n_2 \sin\alpha_2 = 0$$

$$\rightarrow n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin\alpha_2$$

Aufgabe 2

Lichtwellenleiter. Zur schnellen Datenübertragung werden oft Glasfaserkabel verwendet. So ein Kabel besteht im Prinzip aus einem langen, transparenten Kern mit einem Brechungsindex n_2 der von einem Mantel mit dem Brechungsindex $n_3 < n_2$ umgeben ist. Der Unterschied im Brechungsindex führt hier zur Totalreflexion am Übergang Kern-Mantel (siehe Abbildung).



a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Brechungsindizes n_1, n_2 und n_3 den maximalen Eintrittswinkel Θ_1, unter dem ein Strahl in den Leiter eingekoppelt werden kann, damit es zur Totalreflexion am Kern-Mantel Übergang kommt. (**Hinweis:** Die folgenden Identitäten könnten zur Lösung der Aufgabe hilfreich sein: $\sin(x) = \cos(y)$ für $x + y = \pi/2$ und $\cos(\sin^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$)

a) Gemäß Snelliusschem Brechungsgesetz gilt:

$$n_i sin(\theta_i) = n_j sin(\theta_j)$$

Der kritische Winkel für Totalreflexion ergibt sich daraus, wenn der vom Lot gemessene Winkel im zweiten Medium gerade $\pi/2$ ist, da in diesem Fall der Strahl nicht in das zweite Medium eindringen kann - er wird also reflektiert. Somit für unseren Fall:

$$n_2 sin(\theta_C) = n_3 sin(\theta_{3,C}) = n_3 sin(\pi) = n_3$$

$$\Rightarrow \theta_C = sin^{-1}\left(\frac{n_3}{n_2}\right)$$

Nach der Winkelsumme im Dreieck gilt $\theta_2 + \theta_C = \pi/2$ und damit unter Verwendung der gegebenen Identitäten:

$$sin(\theta_2) = cos(\theta_C) = cos\left(sin^{-1}\left(\frac{n_3}{n_2}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2}$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in das Snelliussche Gesetz ergibt:

$$n_1 sin(\theta_1) = n_2 sin(\theta_2) = \sqrt{n_2^2 - n_3^2}$$

b) Lichtstrahlen mit unterschiedlichen Wellenlängen weisen aufgrund von Dispersion verschiedene Geschwindigkeiten im Kernmedium auf. Nehmen Sie nun an, dass der Kern aus einem Silicatkronglas besteht, welches für rotes Licht einen Brechungsindex von $n_r = n(700nm) = 1,5$ und für blaues Licht $n_b = n(700nm) = 1,52$ aufweist. Berechnen Sie mit diesen Angaben den Laufzeitunterschied von roten und blauen Lichtanteilen in zwei Kabeln der Länge $l_1 = 10$ m und $l_2 = 10$ km. Mit welcher maximalen Frequenz können Daten mit Lichtpulsen aus weißem Licht durch die Kabel geschickt werden?

b) Für Licht in einem Medium gilt $c_n = c/n$ und somit für den Laufzeitunterschied:

$$\Delta t = t_b - t_r = \frac{s}{c_b} - \frac{s}{c_r} = \frac{s}{c}(n_b - n_r)$$

Damit ergeben sich die Laufzeitunterschiede $\Delta t(l_1) = 6.7 \times 10^{-10}\,\mathrm{s}$ und $\Delta t(l_2) = 6.7 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}$ und mit $f = 1/\Delta t$ die möglichen Frequenzen (sprich Datenraten) $f_1 = 1.5 \times 10^9\,\mathrm{Hz}$ und $f_2 = 1.5 \times 10^6\,\mathrm{Hz}$.

Dieser Vergleich zeigt, dass mit polychromatischem Licht nur in kurzen Kabeln hohe Datenraten übertragen werden können. Für längere Strecken bietet sich dagegen monochromatisches Licht an.

Aufgabe 3

Interferenz und Beugung am Doppelspalt. Licht der Wellenlänge 550 nm trifft auf zwei Spalte mit der Breite 0,03 mm und dem Abstand 0,15 mm.

a) Wie viele Interferenzmaxima treten in der gesamten Breite des zentralen Beugungsmaximums auf?

a) Für die Anzahl N der Streifen im zentralen Beugungsmaximum gilt N = 2m - 1. Der Winkel θ_1, bei dem das erste Beugungsminimum der Eimhüllenden sinc-Fkt. auftritt, hängt mit der Spaltbreite a zusammen über:

$$\sin(\theta_1) = \frac{\lambda}{a}$$

Der Winkel θ_m, bei dem die m-ten Interferenzmaxima auftreten, hängt mit dem Spaltabstand d zusammen über:

$$\sin(\theta_m) = \frac{m \cdot \lambda}{d}$$

$$\sin(\theta_m) = \frac{m \cdot \lambda}{d}$$

Weil $\theta_1 = \theta_m$ sein soll, können wir die beiden letzten Ausdrücke gleichsetzen. Dies ergibt:

$$\frac{m \cdot \lambda}{d} = \frac{\lambda}{a} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{d}{a}$$

Somit erhalten wir:

$$N = 2m - 1 = \frac{2d}{a} - 1 = 2 \cdot \frac{0,15mm}{0,03mm} - 1 = 9$$

b) Wie verhält sich die Intensität des dritten Interferenzmaximums auf einer Seite von der Mitte (ohne diese mitzuzählen) zur Intensität des zentralen Interferenzmaximums?

b) Beim Einzelspalt hängt die Intensität von der Phasendifferenz Φ folgendermaßen ab:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\Phi)}{\frac{1}{2}\Phi} \right)^2$$

Darin ist die Phasendifferenz $\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\theta)$. Für m $= 3$ ist $\sin(\theta_3) = 3\lambda/d$, und wir erhalten:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin\theta_3 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \frac{3\lambda}{d} = 6\pi \cdot \frac{a}{d} = 6\pi \cdot \frac{0,03mm}{0,15mm} = \frac{6\pi}{5}$$

Mit der obrigen Gleichung für die Intensität ergibt sich:

$$\frac{I_3}{I_0} = \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\Phi)}{\frac{1}{2}\Phi} \right)^2 = \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{6\pi}{5}\right)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{6\pi}{5}} \right)^2 = 0,255$$