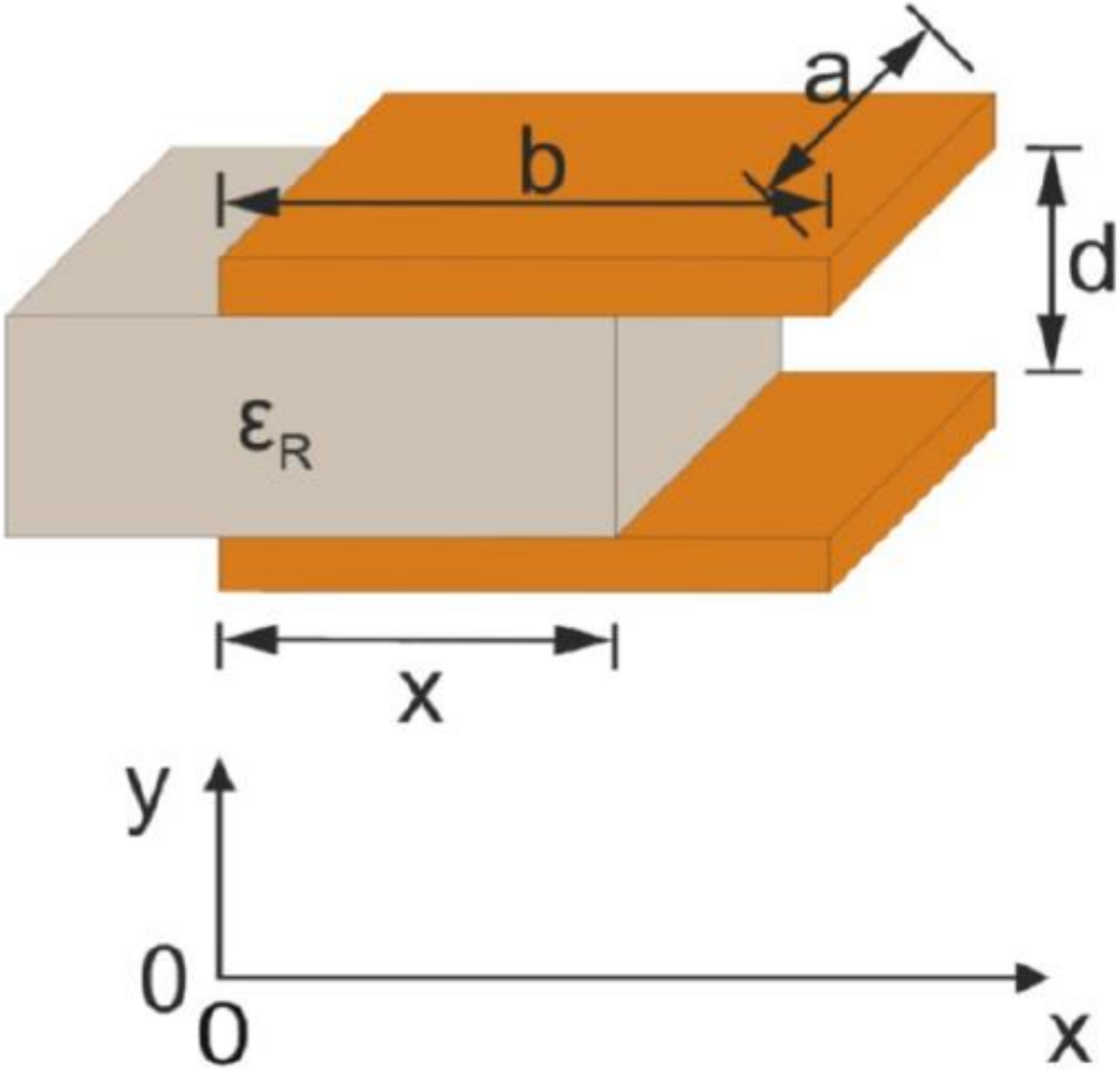
PN2 – Übung

12.06.2020

Aufgabe 1

Kondensator mit Dielektrikum. Ein mit der Ladung q geladener Kondensator befindet sich an Luft ($\epsilon_r = 1$) und ist teilweise mit einem Dielektrikum (ϵ_r) gefüllt (siehe Abbildung). Der Kondensator besteht aus zwei rechteckigen Platten mit Länge a und Breite b und mit einem Abstand d zueinander. Das Dielektrikum ist über die Strecke x in den Zwischenraum eingeführt.



a
b
d
ε_R
x
y
0
o
x

a) Wie groß ist die in dem Kondensator gespeicherte Energie?(**Tipp:** Überlegen Sie ob man in der vorliegenden Situation den Kondensator um zwei in Reihe oder um zwei parallel geschaltete Kondensatoren betrachtet kann.

a) Wir betrachten den Kondensator als zwei parallel geschaltete Kondensatoren. Dabei ist Kondensator 1 mit einem Dielektrikum mit der Dielektrikumskonstante ϵ_R gefüllt, Kondensator 2 dagegen mit Luft. Die gespeicherte Energie in einem Kondensator ist gegeben durch:

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

Die beiden Teilkondensatoren haben die Kapazitäten:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0\epsilon_R \cdot a \cdot x}{d} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0\epsilon_L \cdot a \cdot (b-x)}{d}$$

Weil die Kondensatoren parallel geschaltet sind, ist die Gesamtkapazität einfach die Summe beider:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_R \cdot a \cdot x}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_L \cdot a \cdot (b - x)}{d} =$$
$$= \frac{\epsilon_0 \cdot a}{d} (\epsilon_R \cdot x + b - x) = \frac{\epsilon_0 a}{d} [(\epsilon_R - 1) \cdot x + b]$$

Damit ergibt sich die Gesamtenergie:

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{q^2 \cdot d}{\epsilon_0 a \, [(\epsilon_R - 1) \cdot x + b]}$$

b) Die Energie des Kondensators nimmt mit wachsendem x ab. Die impliziert, dass das elektrische Feld am Dielektrikum Arbeit verrichtet. Somit muss es eine elektrische Kraft geben, die das Dielektrikum hineinzieht, da das Gesamtsystem versucht seine Energie zu minimieren. Berechnen Sie diese Kraft, indem Sie untersuchen, wie sich die gespeicherte Energie mit der Strecke x ändert.

b) Die von dem elektrischen Feld ausgeübte Kraft ist gleich der Ableitung der potentiellen Energie nach dem Weg: (siehe auch – Handout 03)

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2 \cdot d}{\epsilon_0 a\left[(\epsilon_R - 1) \cdot x + b\right]}\right) =$$

$$= -\frac{q^2 d}{2\epsilon_0 a} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\left[(\epsilon_R - 1) \cdot x + b\right]}\right) =$$

$$= \left(\frac{(\epsilon_R - 1) \cdot q^2 d}{2\epsilon_0 a\left[(\epsilon_R - 1) \cdot x + b\right]^2}\right)$$

c) Drücken Sie die Kraft durch die Kapazität C und Spannung V zwischen den Platten aus.

Für die Kraft gilt:

$$F = \left(\frac{(\epsilon_R - 1) \cdot q^2 d}{2\epsilon_0 a \left[(\epsilon_R - 1) \cdot x + b\right]^2} \right)$$

Kapazität:

$$C = \frac{\epsilon_0 a}{d} \left[(\epsilon_R - 1) \cdot x + b\right]$$

c) Umformen der aus (b) erhaltenen Gleichung liefert:

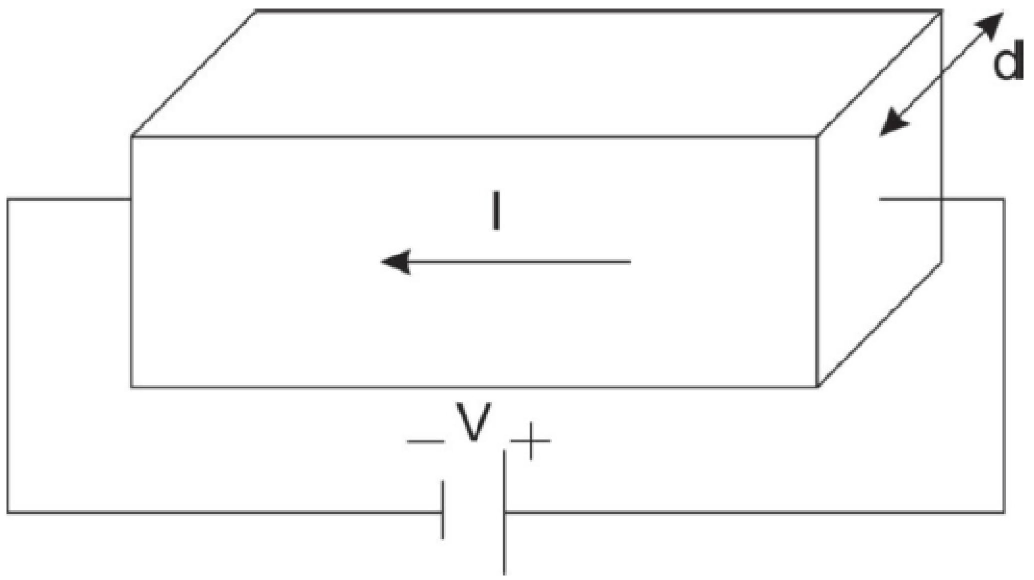
$$F = \left(\frac{(\epsilon_R - 1) \cdot q^2 \left(\frac{a\epsilon_0}{d}\right)}{2 \left(\frac{a\epsilon_0}{d}\right)^2 \left[(\epsilon_R - 1) \cdot x + b\right]^2} \right) = \frac{(\epsilon_R - 1) \cdot q^2 \left(\frac{a\epsilon_0}{d}\right)}{2\, C^2} = \frac{(\epsilon_R - 1) \cdot V^2 \cdot a\epsilon_0}{2 \cdot d}$$

d) Woher kommt diese Kraft?

Die Kraft kommt daher, dass die auf der Oberfläche des Dielektrikums erzeugten Ladungen von den freien Ladungen auf den Kondensatorplatten angezogen werden.

Aufgabe 2

Hall-Effekt. Betrachten Sie einen langen Draht mit quadratischen Seitenlängen d, welcher an beiden Enden mit einer Spannungsquelle verbunden ist.



a) Bestimmen Sie die Ladungsträgerdichte n in Abhängigkeit von der Stromstärke I und der Driftgeschwindigkeit v_d, welche in dem Draht vorhanden ist.

a) Für die Stromdichte j gilt:

$$j = n \cdot e \cdot v_D = \frac{I}{A}$$

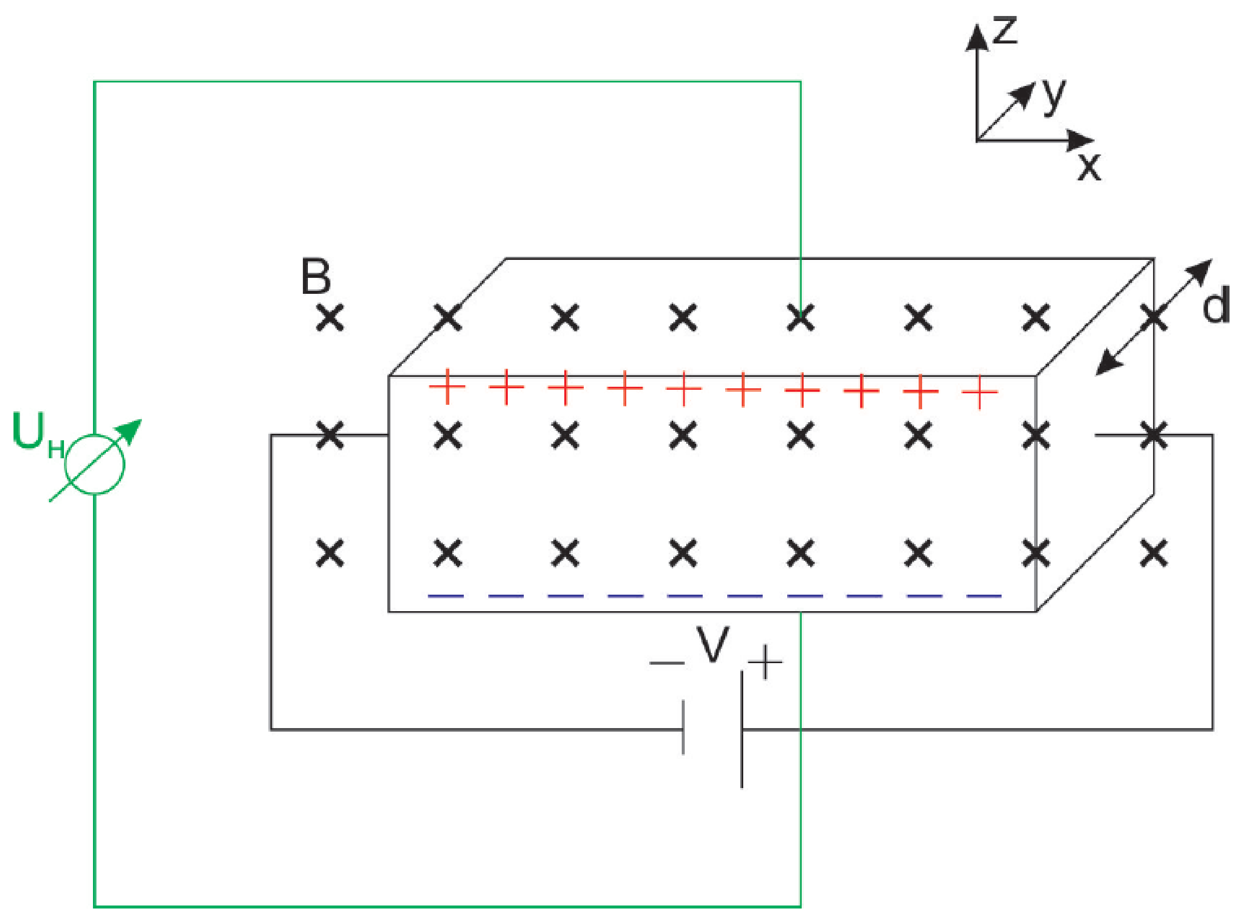
Somit gilt für die Teilchendichte n:

$$n = \frac{j}{e \cdot v_D} = \frac{I}{d^2 \cdot e \cdot v_D}$$

b) Nun wird senkrecht zur Stromrichtung ein Magnetfeld der Stärke B angelegt. Erklären Sie unter Zuhilfenahme der Lorentzkraft, warum Sich senkrecht zum Magnetfeld und der Stromrichtung die Ladung an der Oberfläche des Drahtes akkumulieren und bestimmen Sie das Vorzeichen der Probeladung auf beiden Seiten des Drahtes. Nehmen Sie hierzu an, dass Elektronen durch den Draht strömen.

Die Lorentzkraft wirkt auf die Elektronen, die durch den Leiter in die positive x-Richtung fließen. Das Magnetfeld B zeigt in die positive y-Richtung, welches eine Lorentzkraft in die negative z-Richtung entspricht.

Die Elektronen akkumulieren also am unteren Ende des Drahtes und am oberen Ende bleibt eine positive Ladung übrig. (Überlegung über Rechte-Hand Regel)



z
y
x
B
d
U_H
V

c) Nach kurzer Zeit stellt sich ein Kräftegleichgewicht zwischen Lorentzkraft und Anziehung der Ladungen auf den verschiedenen Seiten des Drahtes an. Leiten Sie einen Ausdruck für die Spannung U_H für die Spannung zwischen den verschiedenen Seiten her und nutzen Sie diese Formel um eine Formel für die Teilchendichte n zu finden. (**Tipp:** Nähern Sie die obere und untere Grenzfläche des Leiters als Plattenkondensator an.)

- Die elektr. Kraft ist:

$$F_C = q \cdot E$$

- Für den Plattenkond. gilt:

$$E = \frac{V}{d}$$

- Im Kräftegleichgewicht gilt dann:

$$F_C = F_L \longrightarrow q \cdot E = q \cdot v_D \cdot B$$

$$\frac{V_H}{d} = v_D \cdot B$$

$$V_H = v_D \cdot B \cdot d$$

- Mit dem Ergebnis aus a) kann man jetzt die Teilchendichte *n* bestimmen:

$$n = \frac{j}{e \cdot v_D} = \frac{I}{d^2 \cdot e \cdot v_D} = \frac{I \cdot B}{d \cdot e \cdot V_H}$$