PN2 – Übung

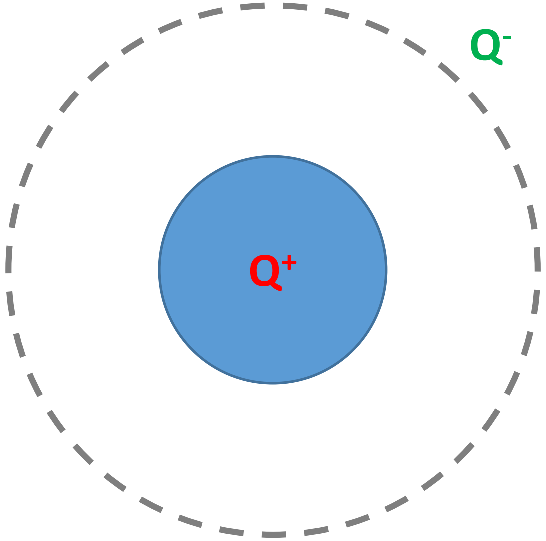
22.05.2020

Aufgabe 1

Satz von Gauß. Betrachten Sie eine mit der Ladung Q^+ geladene Vollkugel mit Radius R_V , die sich im Mittelpunkt einer mit Q^- geladenen Hohlkugel mit Radius R_H befindet. Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes das elektrische Feld $\vec{E}$ innerhalb der Vollkugel, im Zwischenraum und außerhalb der Hohlkugel. Nehmen Sie an, dass die Ladung gleichmäßig auf der Kugelschale bzw. im Kugelvolumen verteilt ist, und dass die Kugelschale eine verschwindende Dicke besitzt.

Tipp: Unterscheiden Sie zwischen dem Feld $E(r)$ für $r \leq R_V$, $R_V < r \leq R_H$ und $r > R_H$.

Gaußscher Satz:



$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\mathrm{ein}}}{\epsilon_0}$$

- Fläche muss geschlossen sein
- Nur in Vakuum (für Luft sehr gute Näherung)

▪ Für die Anwendung des Satzes von Gauß wählen wir eine Kugelschale mit dem Radius *r*.

Der Satz von Gauß hat dann folgende Form, die durch die Kugelsymmetrie weiter vereinfacht werden kann →

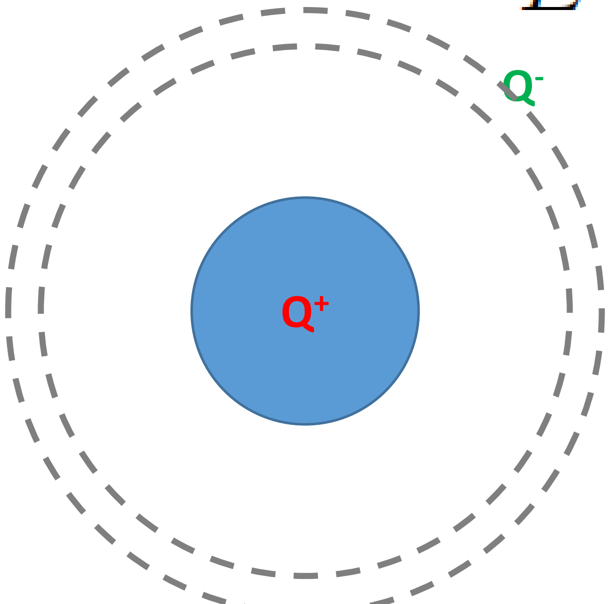
$$\Phi = \oint_A \vec{E}(r) d\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) \oint_A dA = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

Hier bezeichnet das Integral auf der linke Seite lediglich die Oberfläche 4 π r^2 der Gaußschen Kugelschale !!

1. Fall: **r > R_H**

Da die beiden Kugeln genau entgegengesetzt geladen sind, ist eingeschlossene Ladung gleich 0, also → Q_{innen} = 0.

Daraus folgt: $$E \oint_A dA = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$ und $$\boxed{E(r) = 0}$$

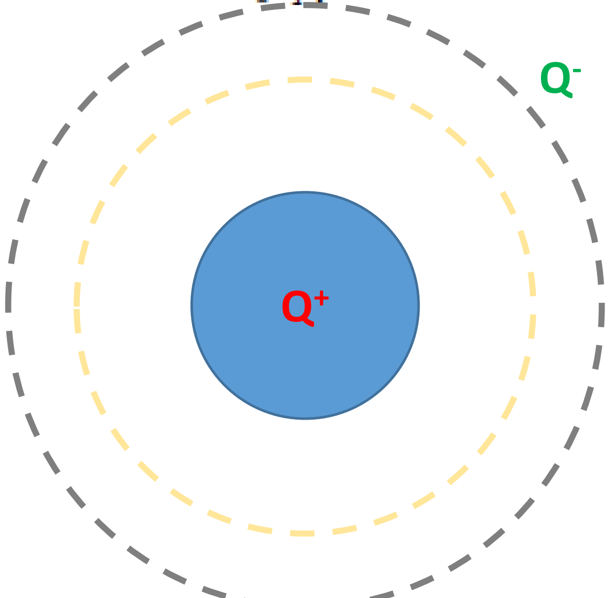


2. Fall: $R_V < r \leq R_H$

Im Zwischenraum innerhalb der Hohlkugel befindet sich die Ladung der Vollkugel, Q^+ innerhalb der Gaußfläche. Somit ist Q_{innen} = Q. Daraus ergibt sich:

$$E \oint_A dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

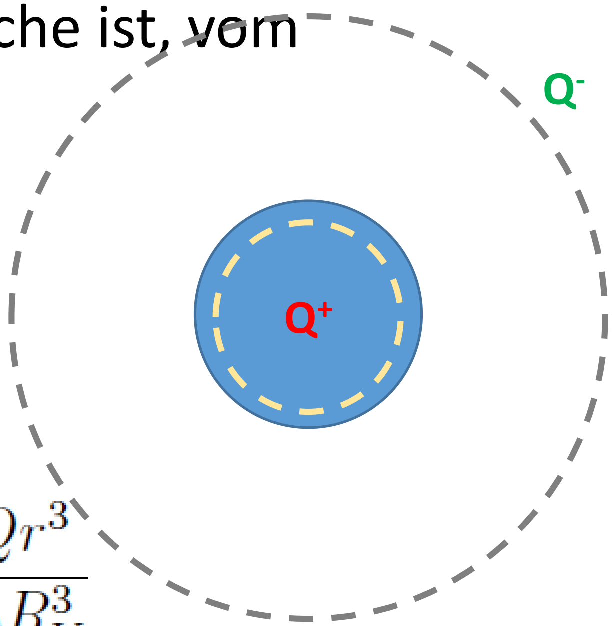
und damit:



$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\epsilon_0 \pi r^2}}$$

3. Fall: $r \leq R_V$

Für die Vollkugel hängt die Ladung Q_{innen} , die innerhalb der Gaußfläche ist, vom Radius r der Gaußfläche ab. Es gilt:



$$Q_{\text{innen}} = Q\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_V^3} = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Dann ergibt sich:

$$E\oint_A dA = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r)\ 4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R_V^3}$$

Und damit:

$$\boxed{E(r) = \frac{Qr}{4\epsilon_0 \pi R_V^3}}$$

Aufgabe 2

Bindungsenergie in Ionenkristallen. Berechnen Sie eine Abschätzung für die Bindungsenergie in einem ionisch gebundenen $NaCl$ Kristall. Vernachlässigen Sie hierzu alle quantenmechanischen Effekte und berechnen Sie die Bindungsenergie E_G, indem Sie das Coulombpotential vom Einbringen eines Na^+ Ions in das Kristallgitter bestimmen. Betrachten Sie die Ionen als Punktladungen und nehmen Sie als Abstand zwischen den Na^+ und den Cl^- Ionen $a \approx 0.3nm$ an.

Tipp: Das Coulombpotential $V(a)$ vom Einbringen des Na^+ Ions in den Gitterplatz im Abstand a von den anderen Ionen kann durch:

$$V(a) = -\int_{-\infty}^{a} F_C(r)dr$$

beschrieben werden. Es empfiehlt sich das Coulombpotential erst einmal für zwei Punktladungen auszurechnen und dann die Potentiale der verschiedenen Ionen zu addieren.

a) Berechnen Sie die Bindungsenergie in der Einheit eV für den stark vereinfachten Fall, dass das Kristallgitter nur aus 6 Cl^- Ionen besteht, die das Na^+ Molekül umranden.

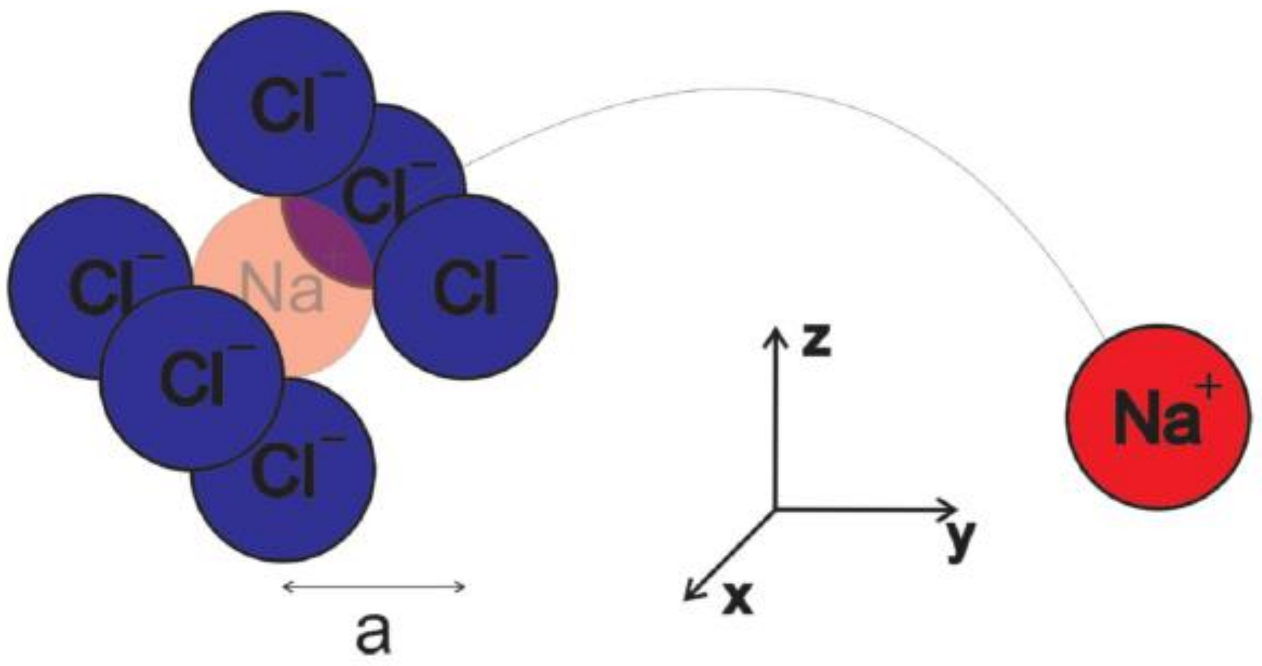


Abbildung 1: Gittermodell für Aufgabenteil a). Das Na^+ Ion wird in jede der drei Raumrichtungen von jeweils 2 Cl^- Ionen eingehüllt.

Lösung:
Das Coulombpotential von zwei einfach geladenen Punktladungen im Abstand a ist:

$$V(a) = -\int_{-\infty}^{a} F_C(r)dr = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{a} \tag{2}$$

Die Bindungsenergie berechnet sich dann indem man die Potentiale der 6 Cl^- addiert, die jeweils den gleichen Beitrag liefern.

$$E_B = 6 \cdot V(a) = -\frac{6}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{a} = -8,6eV \tag{3}$$

b) Berechnen Sie die Bindungsenergie für das bessere Modell eines Kristallgitters bestehend aus 6 Cl^- und 12 Na^+ Ionen, die das Na^+ Ion einschließen. Beachten Sie, dass der Abstand zwischen den Na^+ Ionen ungleich dem Abstand zwischen den Na^+ und Cl^- Ionen ist. Geben Sie die Bindungsenergie E_B in eV an.

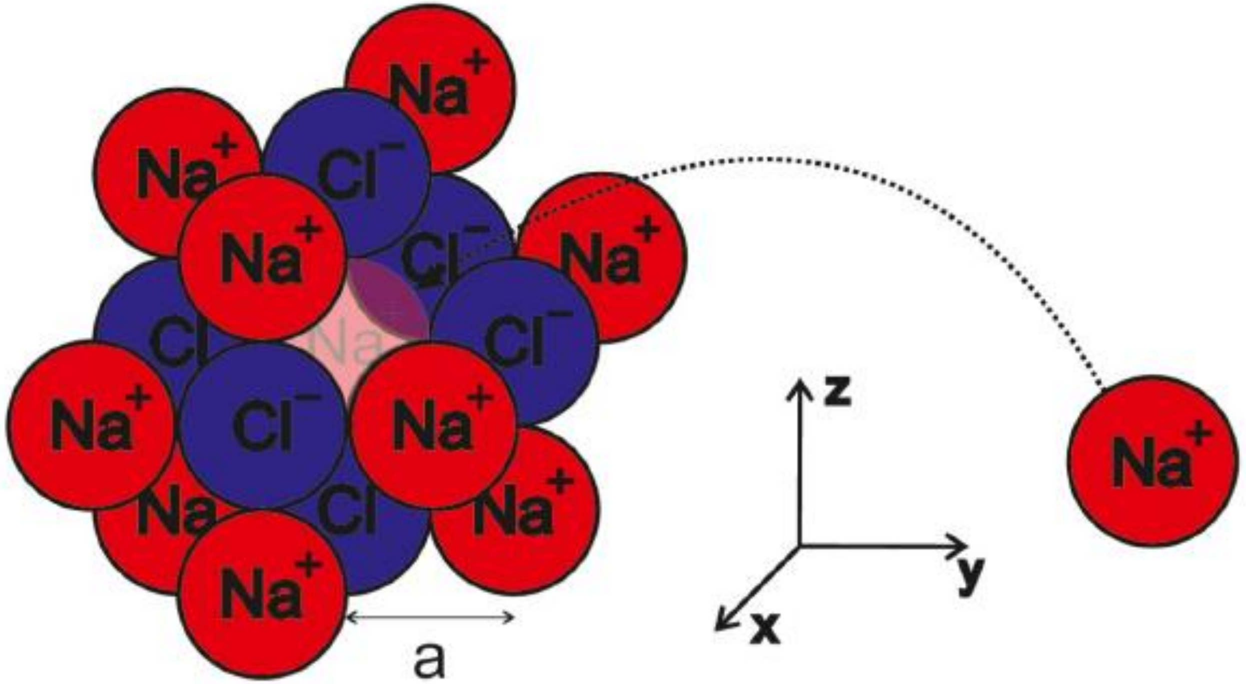
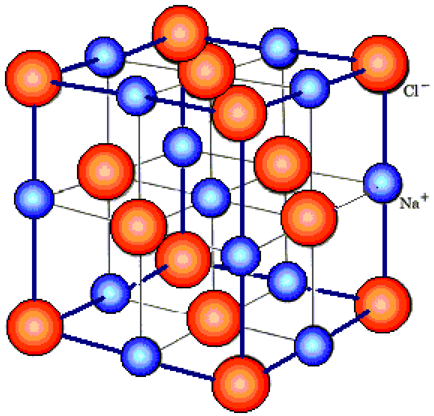


Abbildung 2: Gittermodell für Aufgabenteil b). Das Na^+ Ion wird in jede der drei Raumrichtungen von jeweils 2 Cl^- Ionen und in den 6 Diagonalen von jeweils 2 Na^+ Ionen eingehüllt.



Kubisch flächenzentriert mit 2-atomiger Basis.

Lösung:

Für diesen Fall muss noch der Abstand b zwischen den Na^+ Ionen bestimmt werden, welcher sich nach Pythagoras $b^2 = a^2 + a^2$:

$$b = \sqrt{2}a \tag{4}$$

Zur Bindungsenergie müssen dann nun noch das Potential der anderen 12 Na^+ Ionen subtrahiert werden, da es aufgrund der anderen Ladung abstoßend wirkt:

$$E_B = 6 \cdot V(a) - 12 \cdot V(b) = +3,6eV \tag{5}$$

c) Betrachtet man makroskopische Gitter, berechnet also die Wechselwirkungen mit allen Nachbarn im Gitter, so ist die Bindungsenergie pro Na^+ Ion:

Im Kristallgitter !! $$E_B = \alpha \cdot V(a)$$

α ist die sogenannte Madelung-Konstante, welche fürr den Fall von $NaCl$ bei $\alpha \approx 1,7476$ liegt. Erklären Sie wieso es aufgrund des Werts der Madelung- Konstante zu einer Gitterbildung im Falle von $NaCl$ kommt. Was sagt die Größe der Madelung-Konstante über das Gitter aus?

Tipp: Nutzen Sie aus, dass das System den energetisch niedrigsten Zustand anstrebt und vergleichen Sie die Energien eines einfach ionisch gebundenen Na^+ an ein Cl^- Ion mit einem gebundenen Na^+ in einem Gitter.

▪ Die Bindungsenergie des Na^+ Ion im Gitter ist um den Faktor der Madelungskonstante anders als in einem einfachen NaCl Molekül.

▪ Die Ionen sind in einem Kristall stärker gebunden als im Molekül. Das muss so sein, denn sonst würde sich aus Molekülen oder Ionen nie ein Festkörper formen.

▪ Für eine Madelungskonstante < 1 ist die Bindungsenergie im Gitter niedriger als im Molekül.

▪ Somit wird für eine ein Madelungskonstante > 1 das Gitter als Form angenommen und für eine ein Madelungskonstante < 1 das Gitter **nicht** als Form angenommen!