Arnold Sommerfeld Center	Ludwig–Maximilians–Universität München

Prof. Dr. Stefan Hofmann — Sommersemester 2019

Übungen zu Theoretischer Mechanik T1

Blatt 1, bis 15. Mai

Aufgabe 1 – Affine Räume

In der folgenden Aufgabe erörtern wir die Eigenschaften affiner Räume und arbeiten insbesondere die Unterschiede zu Verktorräumen heraus. Vereinfacht sind affine Räume „Verktorräume ohne Ursprung“. Gerade in der Physik liefert dies eine natürlichere Beschreibung, da es keinen Grund gibt einen bestimmten Punkt vor allen anderen auszuzeichnen. Grundlegender ist jedoch der Unterschied in der Geometrie; die geometrischen Eigenschaften des Vektorraums sind invariant unter der Gruppe der bijektiven linearen Abbildungen, wohingegen affine Geometrie invariant unter der Gruppe der bijektiven affinen Abbildungen ist. Die beiden Gruppen sind jedoch nicht isomorph, daher gibt es sozusagen “mehr” affine Abbildungen als lineare.

Unterschied zwischen Vektoren und Punkten

Gegeben sie der Raum der Punkte in drei Dimensionen $E := \mathbb{R}^3$, sowie der Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$. Für zwei Punkte $A = (a_1, a_2, a_3)$ und $B = (b_1, b_2, b_3)$ definieren wir den Abstandsvektor $\boldsymbol{AB} \in V$ als

$$\boldsymbol{AB} := (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Außerdem wählen wir zwei Ursprünge $U, \Omega \in E$, $U = (0, 0, 0)$ und $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ mit deren Hilfe sich Ortsvektoren definieren lassen.

(i) Gegeben einen affinen Raum $(E, V, +)$ und drei Punkte $a, b, c \in E$, zeigen sie die Identität: $\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc} = \boldsymbol{ac}$.
Unter Nutzung der Darstellung des Abstandsvektor folgt die zu zeigende Relation,

$$\mathbf{ab} + \mathbf{bc} = (b_i - a_i) + (c_i - b_i) = c_i - a_i = \mathbf{ac}.$$

(ii) Zeigen Sie $\boldsymbol{UA} = \boldsymbol{U\Omega} + \boldsymbol{\Omega A}$.

Hier ist die oben genannte Definition anzuwenden:

$$(a_1 - 0, a_2 - 0, a_3 - 0) = (a_1, a_2, a_3) = (\omega_1 - 0, \omega_2 - 0, \omega_3 - 0) + (a_1 - \omega_1, a_2 - \omega_2, a_3 - \omega_3) = (a_1, a_2, a_3)$$

(iii) Berechnen Sie den Ortsvektor von A und B bezüglich Ω.

Ebenfalls lediglich einsetzen in die Definitions des Abstandsvektors:

$$\mathbf{\Omega A} = (a_1 - \omega_1, a_2 - \omega_2, a_3 - \omega_3)$$
$$\mathbf{\Omega B} = (b_1 - \omega_1, b_2 - \omega_2, b_3 - \omega_3)$$

(iv) Betrachten Sie zwei *Vektoren* $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ bezüglich einer Basis $\{\boldsymbol{e}_i\}$. Sei $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_i\}$ eine andere Basis, so dass $\mathcal{M}$ die Transformationsmatrix ist, d.h. $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^T = \mathcal{M}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)^T$etc. Geben Sie an, wie die Linearkombination $\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}$ unter diesem Basiswechsel transformiert.

Hier macht es zunächst Sinn, sich die Transformation, die oben genannt ist, in Komponentenschreibweise klar zu machen,

$$\mathbf{v} = v^i e_i = \mathcal{M}^i{}_j \tilde{v}^j e_i = \tilde{v}^j \tilde{e}_j = v^i (\mathcal{M}^{-1})\,{}_i^j \tilde{e}_j$$

Obwohl äquivalent stellt nur der letzte Ausdruck manifest die Basistransformation dar, weswegen wir diesen nun in die Linearkombination einsetzen und das gewünschte Ergebnis erhalten:

$$\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \alpha v^i (\mathcal{M}^{-1})\,{}_i^j \tilde{e}_j + \beta w^i (\mathcal{M}^{-1})\,{}_i^j \tilde{e}_j$$

(v) Betrachten Sie nun die *Ortsvektoren* von A und B bezüglich U; $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$, beziehungsweise bezüglich Ω; $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3), (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$. Drücken Sie die Linearkombination $\alpha(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) + \beta(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$ durch die a_i und b_i aus.

Mit den oben bereits berechneten Abstandsvektoren für A und B bezüglich Ω können wir direkt den Ausdruck für die Linearkombination schreiben als

$$(\alpha\tilde{a}_i + \beta\tilde{b}_i) = (\alpha(a_i - \omega_i) + \beta(b_i - \omega_i)) = (\alpha a_i + \beta b_i - (\alpha + \beta)\omega_i),$$

die sich im allgemeinen von

$$((\alpha a_i + \beta b_i) - \omega_i)$$

unterscheiden.

(vi) Welche Bedingung müssen α und β erfüllen damit ihr Ergebnis nicht von der Wahl des Ursprungs abhängt?

Unabhängigkeit der Wahl des Ursprungs ist, wie aus der letzten Gleichung ersichtlich ist, gegeben falls

$$\alpha + \beta = 1.$$

Beispiele für affine Räume

(i) Finden Sie eine geeignete Abbildung $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ um auf der Menge M der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, welche die Gleichung $x + y = 1$ erfüllen, einen affinen Raum zu definieren.

Anhand der gegebenen Bedingung kann man leicht sehen, dass die Punkte alle auf einer Geraden liegen, demnach es sich um ein eindimensionales Problem handelt. Eine geeignete Abbildung ist

$$\begin{aligned} \phi :& M \times \mathbb{R} \to M \\ &(x, y) \longmapsto (x + \alpha, 1 - x - \alpha), \end{aligned}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Sei $\mathcal{M}$ eine $n \times m$ Matrix und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge der Lösungen für die Gleichung $\mathcal{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m | \mathcal{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ ein affiner Raum über Kern$(\mathcal{M})$ ist. Zeigen Sie, dass U im Allgemeinen kein Vektorraum ist. *Hinweis: Überlegen Sie sich dies zunächst für eine explizite Matrix.*
Wenn $\mathbf{b} \neq 0$, so bildet U keinen Vektorraum. Sei $x \in U$ und $v \in \text{Kern}\mathcal{M}$ dann soll gelten $x + v \in U$.

$$\mathcal{M}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathcal{M}\mathbf{x} + \mathcal{M}\mathbf{v} = \mathbf{b}$$

Da $\mathcal{M}\mathbf{v} = 0$ gilt die obige Aussage.

Aufgabe 2 – Galilei Raumzeit

Eine allgemeine Galilei Transformation ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t' \\ \boldsymbol{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + t_0 \\ R(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t) \end{pmatrix},$$

wobei $R \in SO(3)$ eine Rotationsmatrix auf $\mathbb{R}^3$ ist.

(i) Zeigen Sie, dass die obigen Transformationen eine Gruppe bilden, d.h. zu jeder Transformation gibt es ein Inverses, die Komposition von Galilei Transformationen ist wieder eine Galilei Transformation und es existiert eine neutrale Transformation die $(t, \boldsymbol{x})$ auf $(t, \boldsymbol{x})$ abbildet.

Betrachten wir zunächst zwei hintereinander ausgeführte Galilei Transformationen,

$$r_1 = R^{(1)} r_0 + v^{(1)} t_0 + r^{(1)}; t_1 = t_0 + t^{(1)}$$
$$r_2 = R^{(2)} r_1 + v^{(2)} t_1 + r^{(2)}; t_2 = t_1 + t^{(2)}.$$

Man kann nun ebenfalls eine Galilei Transformation finden, sodass

$$r_2 = R^{(3)} r_0 + v^{(3)} t_0 + r^{(3)}; t_2 = t_0 + t^{(3)}.$$

Setzt man nun den ersten in den zweiten Ausdruck ein, findet man die folgenden Zusammenhänge,

$$\begin{aligned} R^{(3)} &= R^{(2)} R^{(1)} \\ v^{(3)} &= R^{(2)} v^{(1)} + v^{(2)} \\ r^{(3)} &= R^{(2)} r^{(1)} + r^{(2)} + v^{(2)} t^{(1)} \\ t^{(3)} &= t^{(2)} + t^{(1)}. \end{aligned}$$

Nun gilt es, die Gruppenaxiome zu überprüfen.

- Es existiert eine Verknüpfungsoperation, sodass

  $$g(R^{(2)}, v^{(2)}, r^{(2)}, t^{(2)}) g(R^{(1)}, v^{(1)}, r^{(1)}, t^{(1)}) = g(R^{(3)}, v^{(3)}, r^{(3)}, t^{(3)}).$$

  Dies ist durch die oben genannte Relation bereits gezeigt.
- Die Verknüpfungsoperation ist assoziativ, $g_3(g_2 g_1) = (g_3 g_2) g_1$. Dies ist erfüllt, da die Addition und die Matrixmultiplikation diese Eigenschaft besitzen.
- Es existiert ein neutrales Element, $E = g(\mathbb{1}, 0, 0, 0)$ mit $gE = Eg = g$.
- Zu jedem g existiert eine inverse Transformation g^{-1}, sodass $gg^{-1} = E$. Sei $g = g(R, v, r, t)$, dann kann man aus der Relation oben ablesen, dass $g^{-1} = g(R^T, -R^T v, tR^T v - R^T r, -t)$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(ii) Wie viele unabhängig von einander wählbare Parameter hat die obige Transformation, d.h. welche Dimension hat die Gruppe?

Die Galilei Transformation hat drei Rotationsparameter, drei Parameter für die Geschwindigkeiten, drei Parameter für die Raumtranslationen, sowie einen Parameter für die Zeittranslation. Also 3+3+3+1 = 10 Parameter insgesamt.

(iii) Betrachten Sie nun die spezielle Transformation für die R eine Rotation um die x-Achse um den Winkel α bezeichnet und $\boldsymbol{v} = (0, v_0, 0)^T, t_0 = \boldsymbol{r}_0 = 0$ ist. Zeigen Sie, dass die newtonsche Gleichung $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ invariant unter dieser Transformation ist, d.h. $\boldsymbol{F'} = m\ddot{\boldsymbol{r}}'$.
Da wir bereits gezeigt haben, dass man Galilei Transformationen verknüpfen kann, dürfen wir beide Transformationen separat zeigen. Beginnen wir mit der konstanten Geschwindigkeit.

$$m\mathbf{r}' = m\mathbf{r} + m\mathbf{v}t \longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(m\mathbf{r} + m\mathbf{v}t\right) = m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{a},$$

also gilt

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} = \mathbf{F}' = m\mathbf{a}',$$

was zu zeigen war. Die Rotation können wir nun gesondert betrachten,

$$\mathbf{F}' = R_z(\alpha)\mathbf{F} = m \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r_1} \\ \ddot{r_2} \\ \ddot{r_3} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{r_1} \\ \ddot{r_2}\cos\alpha - \ddot{r_3}\sin\alpha \\ \ddot{r_2}\sin\alpha + \ddot{r_3}\cos\alpha \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{r_1}' \\ \ddot{r_2}' \\ \ddot{r_3}' \end{pmatrix} = m\ddot{\mathbf{a}}'.$$

(iv) Zeigen Sie, dass Galilei Transformationen affine Transformationen sind. Eine Abbildung $f : E \to E'$ zwischen zwei affinen Räumen (E, V_E) und $(E', V_{E'})$ heißt genau dann affin, wenn es eine lineare Abbildung $\varphi : V_E \to V_{E'}$ gibt so, dass $\forall p, q \in E$

$$\boldsymbol{f}(p)\boldsymbol{f}(q) = \varphi(\boldsymbol{pq}).$$

Die linke Seite bezeichnet hierbei den Verbindungsvektor zwischen den Punkten $f(p)$ und $f(q)$.

Betrachten wir zwei Inertialsysteme, die durch die Koordinaten $\mathbf{x}, t$ und $\mathbf{x}', t'$ beschrieben werden und aus einer Galilei Transformation hervorgehen, so gilt:

$$\mathbf{x}'^{(a)} = R(\mathbf{x}^{(a)}) + \mathbf{v}t^{(a)} + \mathbf{x}^{(1)}, \qquad \mathbf{x}'^{(b)} = R(\mathbf{x}^{(b)}) + \mathbf{v}t^{(b)} + \mathbf{x}^{(1)}$$

und die Zeit,

$$t'^{(a)} = t^{(a)} + t^1, \qquad t'^{(b)} = t^{(b)} + t^1$$

so dass, die linke Seite $f(p)f(q)$ ist,

$$\mathbf{x}'^{(a)} - \mathbf{x}'^{(b)} = R(\mathbf{x}^{(a)} - \mathbf{x}^{(b)}) + \mathbf{v}(t^{(a)} - \mathbf{v}t^{(b)})$$

$$t'^{(a)} - t'^{(b)} = t^{(a)} - t^{(b)}$$

Dies impliziert, dass die Galilei-Transformation $f(p)f(q)$ ist eine lineare Abbildung, die Darstellung durch Matrizen.

$$f(p)f(q) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'^{(a)} - \mathbf{x}'^{(b)} \\ t'^{(a)} - t'^{(b)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(a)} - \mathbf{x}^{(b)} \\ t^{(a)} - t^{(b)} \end{pmatrix} = \varphi(pq)$$

Dies zeigt, dass $f(p)f(q)$ eine affine Abbildung φ ist, die auf den Vektor pq wirkt. Dies zeigt auch, dass $f(p)f(q) = \varphi(pq)$ erfüllt ist.

(v) Zeigen Sie, dass der räumliche Abstand zwischen zwei gleichzeitigen Ereignissen in der Galilei Raumzeit unter Galilei Transformationen erhalten ist.
Siehe Aufgabe 2, Teilaufgabe (iv). Man sieht, dass wenn man nun einen Zeitpunkt betrachtet, also $t^a - t^b = 0$, räumliche Abstände in beiden Bezugssystemen die gleiche Länge haben.

$$\begin{aligned} |\Delta\mathbf{x}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \longrightarrow |R\mathbf{x} - R\mathbf{y}| &= \sqrt{(R\Delta\mathbf{x})^T(R\Delta\mathbf{x})} \\ &= \sqrt{\Delta\mathbf{x}^T R^T R \Delta\mathbf{x}} \\ &= \sqrt{\Delta\mathbf{x}^T \Delta\mathbf{x}} \\ &= |\Delta\mathbf{x}|. \end{aligned}$$