Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

Blatt 12

1 Hamiltonsche Systeme

Eine Punktmasse der Masse m bewege sich im dreidimensionalen Raum und sei mit einer Feder verbunden, deren zweites Ende an einem Punkt im Raum fixiert sei.

(i) Argumentieren Sie, dass die Bewegung der Punktmasse in einer Ebene stattfindet.

(ii) Überlegen Sie sich, wieso zweidimensionale Polarkoordinaten für die Beschreibung dieses Systems besonders geeignet sind.

(iii) Bestimmen Sie die Energie des Systems in diesen Koordinaten.

Die Hamiltonfunktion $H(r, p_r, \phi, p_\phi)$ dieses Systems lässt sich nun dadurch konstruieren, dass Sie die Koordinatengeschwindigkeiten in der Energie durch die dazugehörigen Impulse und ggf. auftretenden Koordinaten ersetzen, d.h. $H(r, p_r, \phi, p_\phi) = E(r, \dot{r}(p_r), \phi, \dot{\phi}(p_\phi, r))$.

(iv) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion dieses Systems.

(v) Nutzen Sie die Hamilton-Gleichungen, um die Bewegungsgleichungen des Systems zu bestimmen.

(vi) Vergewissern Sie sich, dass die Hamilton-Gleichungen dieses Systems äquivalent sind zu den Newtonschen Gleichungen.

(vii) Argumentieren Sie, dass bei der Bewegung in einem beliebigen rotationssymmetrischen Potential der Drehimpuls erhalten ist.

(viii) Eliminieren Sie die Winkelvariable, um die Bewegung in Radialrichtung durch ein effektives Potential beschreiben zu können.

2 Relativistisches Keplerproblem

Bisher wurde das Keplerproblem nicht-relativistisch betrachtet. Für die relativistische Betrachtung verwenden wir die Hamiltonfunktion eines relativistischen Teilchens der Masse m im Zentralpotential $U = -\alpha/|\boldsymbol{q}|$:

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \sqrt{c^2 \boldsymbol{p}^2 + m^2 c^4} - \frac{\alpha}{|\boldsymbol{q}|} \tag{1}$$

mit Lichtgeschwindigkeit c.

(i) Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion in Polarkoordinaten geschrieben werden kann als

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \sqrt{c^2 \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + m^2 c^4} - \frac{\alpha}{r} \tag{2}$$

(ii) Stellen Sie die Hamilton Gleichungen in geeigneten Koordinaten auf.

(iii) Zeigen Sie analog zu bisherigen Rechnung auf vorherigen Blättern:

$$\varphi = \int dr \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{\frac{1}{c^2}(E + \frac{\alpha}{r})^2 - m^2 c^2 - \frac{L^2}{r^2}}} + \text{const.} \tag{3}$$

(iv) Berechnen Sie das Integral, indem Sie $1/r$ substituieren. Zeigen Sie, dass gebundene Bahnen gegeben sind durch

$$r(\varphi) = \frac{c_1}{1 + c_2 \cos\left(c_3(\varphi - \varphi_0)\right)} \,. \tag{4}$$

Welche Form haben diese Kurven? Bilden Sie den nicht-relativistischen Limes $c \to \infty$.

3 Poissonklammern

Für zwei Funktionen auf dem Phasenraum f und g definiert man die Poissonklammer $\{f, g\}$ wie folgt:

$$\{f, g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right) . \tag{5}$$

(i) Zeigen Sie für eine Funktion $f(p, q, t)$, dass $\frac{df}{dt} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}$ ist.

(ii) Beweisen Sie die Jacobische Identität $\{f, \{g, h\} + \{h, \{f, g\} + \{g, \{h, f\} = 0$

(iii) Betrachten Sie ein vollständig rotationssymmetrisches, dreidimensionales System $H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(r)$. Beweisen Sie mit Hilfe der Poissonschen Klammern, dass die Komponenten des Drehimpulses L_x, L_y, L_z erhalten sind.

(iv) Berechnen Sie die Poissonklammern L_i, L_j für alle i und j. Schreiben Sie ihr Ergebnis in Matrixschreibweise d.h. bestimmen Sie die Form der Matrizen M_i so, dass sich $\{L_i, L_j\}$ als Matrix der form $\sum_{i=1}^{3} L_i M_i$, schreiben lässt.

(v) Es bezeichnen p und q den Impuls respektive Ort eines Teilchens. Betrachten Sie die Transformation $Q = \log(1 + \sqrt{q} \cos p)$ und $P = 2(1 + \sqrt{q} \cos p)\sqrt{q} \sin p$ und berechnen Sie $\{P, Q\}$.

(vi) Sei nun $Q = q^\alpha \cos(\beta p)$ und $P = q^\alpha \sin(\beta p)$. Für welche α und β ist $\{Q, P\} = 1$? Eine solche Transformation wir Kanonische Transformation genannt.