Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

Blatt 11

1 Kepler und Himmelsmechanik

Im folgenden betrachten wir ein Teilchen der Masse m welches sich in einem Zentralpotintial $U(r)$ bewege. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Drehimpuls $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ eine Erhaltungsgröße der Bewegung ist. In geeigneten Koordinten, lässt sich dieser durch den Winkel φ und den Radius r ausdrücken als

$$L_z =: L = mr^2\dot{\varphi}.$$

(i) Argumentieren Sie, weshalb die Bewegung immer innerhalb einer Ebene stattfindet.

(ii) Begründen Sie weshalb die Erhaltung von L impliziert, dass die Fläche welche der Radiusvektor in gegebener Zeit überstreicht konstant ist.

(iii) In Aufgabe 8.3 haben wir gezeigt, dass für ein Teilchen der Energie E der Winkel φ folgende Gleichung erfüllt

$$\varphi = \int dr \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{L^2}{r^2}}} + \text{const.} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die Bahngleichung für ein Potential der Form $U = -\alpha/r$ die Form eines Kegelschnittes annimmt

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi, \tag{2}$$

wobei p und e Konstanten sind die von L, m und E abhängen. Für welche E ist die Bahn Elliptisch?

(iv) Welche Form haben Bahnen für die $E > 0$ ist?

Wir werden nun versuchen eine Parametrische Darstellung für die Zeitabhängigkeit der Koordinaten für den parabolischen Fall ($E = 0$) zu bestimmen.

(vi) Drücken Sie die Zeit t als Integral eine Funktion von r aus. Nutzen Sie die Substitution $r = \frac{p}{2}(1 + \chi^2)$ um $t(\chi), x(\chi)$ und $y(\chi)$ zu bestimmen, wobei x und y die üblichen kartesischen Koordinaten in der Ebene sind.