Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

Blatt 10

1 Oszillatornäherung - Gleichgewichtslagen und kleine Schwingungen, Episode II

In dieser Aufgabe wollen wir die Oszillatornäherung auf eine (mehr oder weniger) realistische Situation anwenden. Konkret begeben wir uns auf ein Raumschiff, das versucht, Messungen an einem schwarzen Loch durchzuführen[1]. Dabei bewegen wir uns zwangsläufig im effektiven Potential des schwarzen Lochs. Wie bereits auf dem letzten Blatt diskutiert ist dieses Potential gegeben durch

$$V_{\text{eff}}(r) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \tag{1}$$

M bezeichne hier die Masse des Zentralkörpers, m die des Raumschiffs und L dessen Drehimpuls. G ist wie üblich die Gravitationskonstante. Sie können diese Aufgabe auch dann vollständig bearbeiten, wenn Sie die Herleitung von (1) noch nicht vollständig nachvollzogen haben.

(i) Skizzieren Sie $V_{\text{eff}}(r)$.

Um möglichst präzise Messungen zu gewährleisten möchten wir nun zunächst erreichen, dass unser Raumschiff sich auf einer exakten Kreisbahn mit Radius r_0 um den Zentralkörper bewegt (siehe Abb. 1).

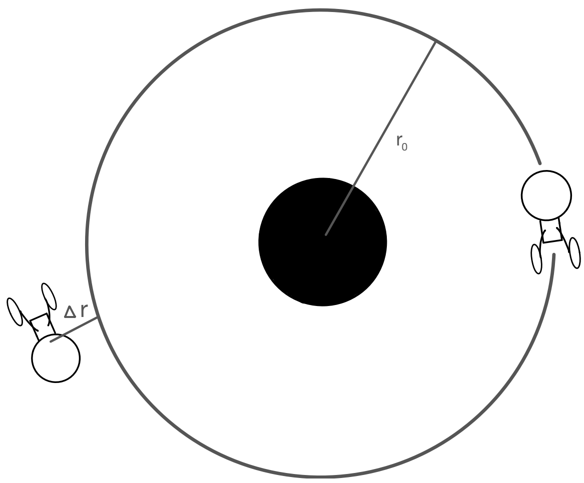

Abbildung 1: Für Teilaufgabe (ii) betrachten Sie zunächst nur die rechte Hälfte der Skizze. Die Konfiguration in der linken Bildhälfte wird erst für Teilaufgabe (iv) relevant.

(ii) Argumentieren Sie, dass der Radius r_0, für welchen das Raumschiff sich auf einer Kreisbahn bewegen kann, dem Minimum des effektiven Potentials entspricht. Geben Sie r_0 explizit an.

(iii) Skizzieren Sie die Bewegung auf der Kreisbahn im (r, v_r)- Phasenraum.

[1] Dass hier ein schwarzes Loch verwendet wird dient einzig der Dramaturgie. Betrachtet man lediglich das Gravitationspotential macht es keinen Unterschied ob es sich beim Zentralkörper um ein schwarzes Loch oder irgendein anderes Objekt handelt.

Da wir nun die Kreisbahn verstanden haben wollen wir diese als Ausgangspunkt nutzen, um die Dynamik in ihrer unmittelbaren Nähe zu untersuchen. Hierzu nehmen wir an, dass unser Raumschiff um eine kleine Auslenkung Δr in seiner Bahn gestört werde, bspw. durch eine ansonsten harmlose Kollision mit einem Asteroiden (siehe Abb. 1). Um die hieraus entstehenden Störungen unserer Messungen kompensieren zu können ist es notwendig, die weitere Bahn des Schiffs vorherzusagen.

(iv) Nutzen Sie die Oszillatornäherung, um die weitere Bahn des Raumschiffs zu berechnen. Skizzieren Sie diese ebenfalls im (r, v_r)- Phasenraum.

Nachdem wir die ersten Messungen erfolgreich beendet haben wollen wir versuchen, näher an das schwarze Loch heranzufliegen. Aus dem Bordcomputer erfahren wir, dass das effektive Potential in der Nähe eines schwarzen Lochs relativistische Korrekturen erfährt und gegeben ist durch

$$W_{\text{eff}}(r) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{L^2 M}{m^2 c^2 r^3}, \tag{2}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichne.

(v) Skizzieren Sie $W_{\text{eff}}(r)$. Dabei dürfen Sie ohne Rechnung annehmen, dass der dritte Term erst für Abstände deutlich kleiner als r_0 relevant wird und dass die potentielle Energie im Maximimum von $W_{\text{eff}}(r)$ positiv ist.

Wenn Sie Ihre Skizze betrachten sollten Sie feststellen, dass in diesem neuen Potential eine weitere Kreisbahn deutlich näher am schwarzen Loch realisierbar ist. Wegen der großen Vorteile von Kreisbahnen für unsere Messungen wollen wir abschließend versuchen, uns dorthin zu begeben.

(vi) Bestimmen Sie die Radien der beiden in diesem Potential möglichen Kreisbahnen. Diese werden wir als r_- und r_+ bezeichnen, wobei $r_- < r_+$.

(vii) Nehmen Sie an, dass wir uns auf die innere Kreisbahn mit Radius r_- begeben haben. Dort werden wir erneut von einem Asteroiden getroffen, wodurch unser Raumschiff sich um δr in Richtung des schwarzen Lochs bewegt. Warum sollten wir hierüber äußerst besorgt sein?

(viii) Um einen Sturz ins schwarze Loch zu vermeiden entschließen wir uns, unmittelbar nach der Kollision von unseren Raumschiff aus ein Shuttle mit Masse μ in seine Richtung abzuschießen. Mit welcher Geschwindigkeit muss dies erfolgen, damit der resultierende Rückstoß unser Schiff genau zurück auf die (innere) Kreisbahn befördert?

(ix) Nachdem wir unsere Messungen erfolgreich beendet haben möchten wir das schwarze Loch wieder verlassen. Nutzen Sie Ihre Skizze von $W_{\text{eff}}(r)$ um zu argumentieren, dass es hierzu ausreicht, dass Raumschiff um eine beliebig kurze Strecke vom schwarzen Loch weg zu bewegen. Skizzieren Sie die sich hieraus ergebende Bewegung im Phasenraum.

2 Zeitabhängige Frequenz

Wie Sie in der Vorlesung bereits gelernt haben, vollführt ein System welches der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}(t)) + kx(t) = 0, \tag{3}$$

genügt harmonische Schwingungen in der Zeit. Die Parameter m und k werden, in Anlehnung an ein entsprechendes System einer gefederten Masse, oft Masse bzw. Federkonstante genannt.

(i) Bestimmen sie die Frequenz ω der Schwingungen die System (3) durchläuft.

(ii) Im Allgemeinen können sowohl m als auch k von der Zeit abhängen. Argumentieren Sie weshalb man dies dennoch ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf ein System mit konstanter Masse und Zeitabhängiger Frequenz abbilden kann.

Im Weiteren gehen wir davon aus, dass die Frequenz ω eine periodische Funktion mit Periode T sei. Es ist dadurch insbesondere möglich die unabhängigen Lösungen des Problems $x_1(t), x_2(t)$ so zu wählen, dass Sie durch Funktionen der Form

$$x_1 = \alpha^{t/T} F_1(t), \quad x_2 = \beta^{t/T} F_2(t) \tag{4}$$

gegeben sind, wobei α und β Konstanten sind und die F_i periodische Funktionen der Zeit.

(iii) Zeigen Sie, dass $W(x_1, x_2) = \mathit{const.}$ ist, wobei W die sogenannte Wronski-Determinante ist.

(iv) Zeigen Sie, dass $\alpha\beta = 1$ und dass entweder $\alpha = \beta^*$ oder $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

(v) Bestimmen Sie mittels Fallunterscheidung für obige Fälle ob das System eine stabile Gleichgewichtslage besitzt.

(vi) Skizzieren Sie für den Fall $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Phasenraumflüsse.

3 Massen auf einem Ring

Betrachten Sie den unten gezeigten Aufbau dreier Massen, welche reibungsfrei auf einer kreisförmigen Schiene mit Radius r gleiten. Sie seien mit drei idealen Federn der Federkonstante k miteinander verbunden. Die Koordinaten bezeichnen hierbei die Winkel der Auslenkungen um die Ruhelagen eines Stabilen Fixpunktes.

(i) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems in Abhängigkeit der θ_i auf.

(ii) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.

(iii) Bestimmen Sie die Eigenschwingungen des Systems und interpretieren Sie sie.

(iv) Geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichungen mittels des Evolutionsoperators an.