Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

Blatt 9

1 Fischen im Phasenfluss

In der Vorlesung wurde das Konzept des Phasenflusses eingeführt, als die Abbildung der Dynamik eines Systems auf den Phasenraum. Der Phasenraum einer gewöhnlichen Differenzialgleichung bezeichnet im Allgemeinen den Raum der möglichen Anfangswerte, in der Mechanik gleichzusetzen mit den Anfangs-Impulsen und Positionen. Die Dimension des Phasenraums hängt daher im Allgemeinen von der Zahl der dynamischen Gleichungen sowie ihrer Ordnung ab. Oftmals können qualitative Aspekte leicht anhand des Phasenflusses abgelesen werden. Wir betrachten als erstes ein einfaches Modell, zur Beschreibung der Karpfenpopulation in einem Teich. Die Anzahl der im Teich lebenden Karpfen zum Zeitpunkt t sei durch die Funktion $N(t)$ gegeben, welche der Gleichung

$$\dot{N} = (m - N)N \tag{1}$$

genügt, wobei $m \in \mathbb{N}$ ist.

(i) Welche Dimension hat der zu (1) gehörige Phasenraum?

(ii) Zeichnen Sie die Integralkurven der Gleichung (1) und argumentieren Sie, dass das System Zwei Gleichgewichtslagen hat. Was ist die maximal mögliche Stabile Karpfenpopulation?

(iii) Wir betrachten nun den Fang von Karpfen mit einer konstanten Fangquote c mit $c < m^2/4$,

$$\dot{N} = (m - N)N - c.$$

Wie viele Gleichgewichtslagen gibt es? Sind sie stabil?

(iv) Bestimmen und Zeichnen Sie zu den obigen Beispielen den Phasenfluss. Bestimmen sie die Phasengeschwindigkeit.

2 Oszillatornäherung - Gleichgewichtslagen und kleine Schwingungen, Teil 1

Bevor wir in die detaillierte Diskussion linearer dynamischer Systeme einsteigen, wollen wir zunächst eine Methode diskutieren, welche die große Relevanz dieser Systeme verdeutlicht. In Teil 1 dieser Aufgabe werden wir uns dieser zunächst durch ein einfaches Beispiel nähern, bevor wir sie auf beliebige geeignete Systeme verallgemeinern. Teil 2 wird sich mit einem konkreten physikalischen Beispiel befassen.
Als Beispiel betrachten wir eine Punktmasse, die sich in folgendem Potential bewege:

$$V(x) = V_0 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{x}{L}\right)\right] \tag{2}$$

(i) Skizzieren Sie das Potential $V(x)$.

(ii) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung einer Punktmasse in diesem Potential. Welche Kraft wirkt auf diese?

Die *Oszillatornäherung* erlaubt die analytische Behandlung von Systemen in der Nähe ihrer *Gleichgewichtslagen*, d.h. derer Konfigurationen, in denen das System sich in Ruhe befindet. Hierfür muss inbesondere gelten, dass die Beschleunigung, die auf die einzelnen Bestandteile des Systems wirkt, verschwindet.
Hierbei muss zwischen zwei Arten von Gleichgewichtslagen unterschieden werden: *Stabile Gleichgewichtslagen* sind dadurch definiert, dass das System nach einer **beliebigen** kleinen Auslenkung wieder in die ursprüngliche Konfiguration zurückkehrt. Im Fall von *instabilen Gleichgewichtslagen* führt eine kleine Auslenkung dazu, dass das System sich weiter von der Gleichgewichtslage entfernt.

(iii) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen der Punktmasse im Potential V, d.h. finden Sie die Punkte im Potential, in denen keine Kraft auf die Punktmasse wirkt. Nutzen Sie Ihre Skizze, um zu entscheiden, welche stabil bzw. instabil sind.

Wir wollen nun die Dynamik des Systems in der unmittelbaren Nähe dieser Gleichgewichtslagen betrachten. Dies erlaubt es uns, das Potential in x zu entwickeln. Wir werden sehen, dass dies in der Nähe eines Minimums zur Dynamik eines harmonischen Oszillators führt, woraus sich die Bezeichnung *Oszillatornäherung* ableitet.

(iv) Entwickeln Sie $V(x)$ bis zur zweiten Ordnung in $\frac{x}{L}$ um eine beliebige Gleichgewichtslage und nutzen Sie dieses entwickelte Potential, um die genäherten Bewegungsgleichungen abzuleiten. Zeigen Sie, dass die Entwicklung um ein Minimum zur Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators führt.

(v) Ergänzen Sie Ihre Skizze aus Teilaufgabe (i) um die genäherten Potentiale um die Gleichgewichtslagen herum.

(vi) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen unter der Annahme, dass die Punktmasse sich in der Nähe eines Minimums aufhält. Geben Sie dabei insbesondere auch die Frequenz an, mit der die Punktmasse um das Minimum oszilliert und überprüfen Sie, dass die Gleichgewichtslage im Minimum tatsächlich stabil ist.

(vii) Lösen Sie nun die Bewegungsgleichungen unter der Annahme, dass die Masse sich zunächst in der Nähe eines Maximums aufhält. Zeigen Sie explizit, dass die entsprechende Gleichgewichtslage instabil ist.

(viii) Wir wollen nun annehmen, dass unsere Punktmasse sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Nähe eines Maximums des Potentials befinde. Bestimmen Sie die Randbedingungen, für welche die Bahn der Puntkmasse die Annahme $\frac{x}{L} \ll 1$ für beliebige Zeiten $t > 0$ erfüllt. Welche Interpretation hat die entsprechende Lösung, und wieso ist sie in realen physikalischen System unwahrscheinlich?

(ix) Verallgemeinern Sie Teilaufgaben (iii)-(vii) für ein beliebiges Potential mit Minima und/oder Maxima.

3 Vollständigkeit

Betrachten Sie ein Punktteilchen der Masse m in folgenden Zentralkraftpotentialen:

(i) $|\boldsymbol{q}|^2$

(ii) $\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}$

(iii) $\ln(|\boldsymbol{q}|)$

Überprüfen Sie diese Systeme jeweils auf Vollständigkeit analog zur Vorlesung.