Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

Blatt 8

1 Picard-Iteration

Betrachten Sie erneut das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = t^2 + x(t)^2, \quad x(0) = 0 \tag{1}$$

welches eine eindeutige Lösung auf $[0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ besitzt. Bestimmen Sie die ersten vier Funtionen $x_0(t), \cdots, x_3(t)$ der Picard-Iteration und plotten Sie diese gegen die tatsächliche Lösung.
Hinweis: Für die exakte Lösung verwenden Sie am besten einen Computer.

2 Methode der sukzessiven Approximation

In der Vorlesung haben Sie die *Methode der sukzessiven Approximation* kennengerlernt, mit deren Hilfe sich approximative Lösungen von Differentialgleichungen finden lassen. In dieser Aufgabe wollen wir diese Methode dazu verwenden, approximative Lösungen der sogenannten *Langevin-Gleichung* zu finden, die bspw. dazu benutzt werden kann, die Bewegung eines Objekts in einer Flüssigkeit zu beschreiben[1]. Im Sinne der Einfachheit wollen wir uns hierbei auf eine Raumdimension beschränken. Die Langevin-Gleichung lautet

$$m\ddot{q}(t) = -\lambda\dot{q}(t) + \eta f(t, q(t)). \tag{2}$$

Die Kraft, die bspw. durch die chaotische Bewegung der Flüssigkeitsmoleküle auf das Objekt wirkt, ist durch die einheitenlose Funktion $f(t, x)$ beschrieben, während λ und η zwei Konstanten bezeichnen.

(i) Welche Interpretation haben die Konstanten λ und η? Geben Sie deren Einheiten an.

Um eine konkrete Lösung zu ermöglichen, betrachten wir nun als einfaches Beispiel die Funktion $f(t, x) = \cos(\omega t - kx)$, wobei ω und k zwei weitere, unbekannte Parameter seien. Der Zustand des Objektes von Interesse sei im Folgenden beschrieben durch seine Kurve im Phasenraum, $\alpha(t) = (q(t), v(t))^T$.

(ii) Überführen Sie die Langevin-Gleichung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung, d.h. bringen Sie sie in die Form $\dot{\alpha}(t) = (\dot{q}(t), \dot{v}(t))^T = \dots$, wobei $v(t) = \dot{q}(t)$.

Nehmen Sie nun an, der Zustand des Objekts zum Zeitpunkt $t = 0$ sei gegeben durch $\alpha_0 = \alpha(0) = (0, 0)^T$.

(iii) Nutzen Sie die Methode der sukzessiven Approximation, um $\alpha_n(t)$ bis einschließlich $n = 3$ zu bestimmen. $\alpha_n(t)$ bezeichne hier, in der Konvention der Vorlesung, das n-te Glied der Reihe $\{\alpha_n\}_n$, die durch die Rekursionsrelation

$$\alpha_{n+1}(t) = \alpha_0 + \int_0^t \mathrm{d}s\ \dot{\alpha}_n(s)$$

gegeben ist.
Hinweis: Damit Sie die späteren Teilaufgaben auf jeden Fall bearbeiten können, finden Sie alle notwendigen Zwischenergebnisse am Ende dieser Aufgabe.

(iv) Skizzieren Sie $\alpha_1(t)$ sowie $\alpha_2(t)$ im (Geschwindigkeits-)Phasenraum für verschiedene Werte von $\frac{\lambda}{m\omega}$.

[1] Diese ist auch als *Brownsche Bewegung* bekannt, die unter anderem von Einstein in einer seiner ersten Publikationen diskutiert wurde.

Um ein Gefühl für den Anwendungsbereich sowie die Genauigkeit der sukzessiven Approximation zu entwickeln, wollen wir nun die von Ihnen gefunden Lösungen genauer untersuchen. Aus der Vorlesung ist Ihnen bekannt, dass die Methode der sukzessiven Approximation *lokale* Lösungen liefert, d.h. Lösungen, die für hinreichend kleine t eine gute Approximation darstellen.

(v) Argumentieren Sie ausgehend von den expliziten Ausdrücken für $\alpha_{1,2,3}$, dass die Bedingung eines *hinreichend kleinen* t in dieser Aufgabe gegeben ist durch $t \ll \frac{1}{\omega}$.
Hinweis: Hier ist noch keine Rechnung notwendig.

(vi) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass die Ihnen bekannten Glieder der Reihe $\{\alpha_n\}_n$ die folgenden Relationen erfüllen:

$$\alpha_1(t) = (\dots) \cdot (\omega t) + \mathcal{O}\big((\omega t)^2\big), \tag{3}$$

$$\alpha_2(t) - \alpha_1(t) = (\dots) \cdot (\omega t)^2 + \mathcal{O}\big((\omega t)^3\big), \tag{4}$$

$$\alpha_3(t) - \alpha_2(t) = (\dots) \cdot (\omega t)^3 + \mathcal{O}\big((\omega t)^4\big) \tag{5}$$

$(\dots)$ bezeichne hier jeweils unterschiedliche, von t unabhängige Koeffizienten. Was bedeuten diese Relationen für die Genauigkeit der sukzessiven Approximation für hinreichend kleine t?

(vii) Entwickeln Sie $\alpha_1(t)$ sowie $\alpha_2(t)$ als Taylor-Reihe bis zur quadratischen Ordnung in ωt. Bestimmen Sie die Zeiten $t = t_v$ bzw. $t = t_q$, für die gilt, dass $|v_1(t_v)| = |v_2(t_v) - v_1(t_v)|$ bzw. $|q_1(t_q)| = |q_2(t_q) - q_1(t_q)|$. Welche Bedeutung haben t_q und t_v für die Genauigkeit der Approximation? Überprüfen Sie Ihre Interpretation anhand Ihrer Skizzen aus Teilaufgabe (iv).

Zwischenergebnisse zu Aufgabe 2

$$\alpha_1(t) = \frac{\eta}{m\omega} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \omega t \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_1(t) - \big(1 - \cos(\omega t)\big) \cdot \frac{\eta}{m\omega^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda}{m} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\alpha_3(t) = \alpha_2(t) + \frac{\eta}{m\omega} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{m\omega^2}\big(\sin(\omega t) - \omega t\big) \\ -\frac{\lambda^2}{m^2\omega^2} \cdot \big(\sin(\omega t) - \omega t\big) + I(t) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

wobei

$$I(t) = \omega \int_0^t \mathrm{d}s \; \cos\left(\omega s - \frac{k\eta}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t)\right) - \cos(\omega s) \tag{9}$$

3 Kepler Problem - Teil 2

Wir betrachten erneut ein Teilchen der Masse m, welches sich in einem Zentralpotential bewege.

(i) Eine andere Herangehensweise an Zentralpotentiale ist die Betrachtung des Azimuthwinkels φ und wie dieser von r abhängt. Zeigen Sie hierfür

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{(L/mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}} \mathrm{d}r \tag{10}$$

wobei L den Drehimpuls bezeichnet und U_{eff} das effektive Potential.
Hinweis: Nutzen Sie die Kettenregel um aus der Bewegungsgleichung $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$ *zu bestimmen.*

(ii) Wir betrachten den Fall einer ungebundenen Lösung eines Teilchens im Potential $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$. Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit der Teilchenkoordinaten für $E = 0$. Skizzieren und diskutieren Sie Ihre Lösung.

(iii) Betrachten Sie erneut Gleichung (10). Es sei $r_{\text{max}} \geq r \geq r_{\text{min}}$. Bestimmen Sie hieraus eine Gleichung für die Änderung des Winkels während eines Umlaufs von r_{min} nach r_{max} und retour. Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit die Bewegung einer geschlossenen Bahn folgt? Um welchen Winkel $\delta\varphi$ verschiebt sich das Perihel der Bewegung pro Umlauf, wenn das Potential eine kleine Störung $\frac{\beta}{r^2}$ erfährt?
Hinweis: Entwickeln Sie das Integral für $U = -\frac{\alpha}{r} + \delta U$ *in erster Ordnung in* δU *und setzen Sie anschließend* $\delta U = \frac{\beta}{r^2}$.