Prof. Dr. Stefan Hofmann | Sommersemester 2020

Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

Blatt 7

1 Lösungsformel für mechanische Systeme mit einem Freiheitsgrad

Das Lösen der Newton-Gleichung kann sich oftmals als äußerst anspruchsvoll herausstellen. Für Systeme mit nur einem Freiheitsgrad existiert allerdings eine Lösungsformel, durch die sich das Lösen der Gleichung auf die (gegebenenfalls ebenfalls schwierige) Ausführung eines Integrals und das anschließende Lösen einer Gleichung reduzieren lässt. Im Rahmen dieser Aufgabe werden Sie diese Formel herleiten und benutzen, um die Lösung der Bewegungsgleichungen für einige Potentiale explizit zu bestimmen.

(i) Betrachten Sie eine Punktmasse, die sich in einem Potential $V(x)$ bewege. Zeigen Sie, dass aus der zeitlichen Erhaltung der Energie $E = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q)$ die Newton-Gleichung folgt.

The coniditoin of energy conservation implies that the total amount of energy does not change over time,

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

This imples,

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{q}\ddot{q} + \dot{q}\frac{d}{dq}V(q)$$

The left hand side is zero and thus we have the following relation between acceleration, mass and potential,

$$m\ddot{q} = -\frac{d}{dq}V(q)$$

Dass die Newton-Gleichung aus der Energieerhaltung hergeleitet werden kann, legt nun den Gedanken nahe, dass diese ebenfalls dazu benutzt werden könnte, die Bewegung der Punktmasse direkt zu bestimmen - d.h. ohne den „Umweg“ über die Newton-Gleichung.

(ii) Leiten Sie, ausgehend vom Ausdruck für die Energie der Punktmasse, die folgende Relation her:

$$t - t_0 = \int_{q_0}^{q(t)} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q))}} \tag{1}$$

Hierbei bezeichne q_0 die Position der Punktmasse zum Zeitpunkt t_0. Dies ist die oben erwähnte Lösungsformel.

Recall the total energy of a point mass:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)$$

We found that,

$$\frac{\dot{q}}{\sqrt{2[E - V(q)]/m}} = 1$$

Integrate both side by time,

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{q(t)} \frac{dq}{\sqrt{2[E - V(q)]/m}}$$

(iii) Lösen Sie das Integral zunächst für den trivialen Fall des Potentials $V_0 = 0$ und überprüfen Sie, dass Ihr Ergebnis mit der Lösung der zum System gehörenden Newton-Gleichung übereinstimmt.
For $V(q) = 0$,

$$t - t_0 = \int_{q_0}^{q(t)} \frac{dq}{\sqrt{2E/m}}$$

Since energy is conserved over time, E and m are constants, the integration gives,

$$t - t_0 = \frac{q(t) - q_0}{\sqrt{2E/m}}$$

To compare with the solution of the Newton equation, recall that in section 1(i),

$$m\ddot{q} = -\frac{d}{dq}V(q)$$

where $V(q) = 0$ impies $dV(q)/dq = 0$, so that for $m \neq 0$,

$$\ddot{q} = 0$$

Take the integration over time,

$$\int \ddot{q}(t)\ dt = \int_{v_{q_0}}^{\dot{q}(t)} d\dot{q} = \dot{q}(t) - v_{q_0} = 0$$

and do it again,

$$\int \dot{q}(t) - v_{q_0} dt = \int_{q(t_0)}^{q(t)} dq - v_{q_0}(t - t_0) = 0$$

The last equation can rewrite into,

$$t - t_0 = \frac{q(t) - q(t_0)}{v_{q_0}}$$

Comparing with our previous result,

$$t - t_0 = \frac{q(t) - q_0}{\sqrt{2E/m}}$$

we can identify that $v_{q_0} = \sqrt{2E/m}$,

$$\dot{q}(t) = \sqrt{2E/m}$$

and

$$\dot{q}(t) = v_{q_0}$$

Lastly, the remaining constant $q(t_0) = q_0$. Therefore we showed our result agrees with the solution of Newton equation.

(iv) Um die Lösung der Newton-Gleichung eindeutig zu bestimmen, sind zwei Anfangsbedingungen - üblicherweise die Anfangsposition q_0 sowie die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{q}_0$ - notwendig, während Gleichung (1) lediglich die Anfangsposition enthält. Ist es Ihnen trotzdem möglich, eine eindeutige Lösung anzugeben? Falls ja, wieso? Welche zusätzliche Information ist nötig falls nicht?
This question can be broken down to the question how the information about the initial velocity enters. Let us first recall that, since we assume a conserved energy,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{q}_0^2 + V(q_0). \tag{2}$$

Thus, given the potential as well as the initial position, we can solve this equation for $\dot{q}_0^2$. This however leaves an ambiguity in the sign of $\dot{q}_0$. Thus, in order to obtain a unique solution, we have to additionally specify the sign of $\dot{q}_0$.

(v) Betrachten Sie nun eine Punktmasse im Potential $V_1(x) = mgx$. Nutzen Sie (1), um die Bahnkurve der Puntkmasse für beliebige Anfangsbedingungen zu bestimmen. Überprüfen Sie, dass Ihr Ergebnis tatsächlich eine Lösung der Newton-Gleichung ist.

For the total energy of the system,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2(t) + mgq(t)$$

where $V(q) = mgq(t)$ with g is a constants. By energy conservation $dE/dt = 0$, we have the Newton equation,

$$\ddot{q} = -g$$

The general solution to the Newton equation is simply,

$$q(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

On the other hand,

$$t - t_0 = \int_{q_0}^{q(t)} \frac{dq(t)}{\sqrt{2[E - mgq(t)]/m}}$$

Consider a change of variable u,

$$u = \frac{2}{m}\left[E - mgq(t)\right], \qquad \frac{du}{dq(t)} = -2g$$

Then we have,

$$t - t_0 = \int_{u_0}^{u(t)} -\frac{du}{2gu^{1/2}} = -\frac{1}{g}(u^{1/2}(t) - u_0^{1/2})$$

Then,

$$u(t) = \left[\sqrt{u_0} - g(t - t_0)\right]^2$$

After a moment of hard working, we can solve for $q(t)$ in terms of t and u_0 and other constants as,

$$q(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (gt_0 + \sqrt{u_0})\, t + \frac{2E - m(gt_0 + \sqrt{u_0})^2}{2mg}$$

We can see that our solution agrees with the solution of the Newton equation, by identifying,

$$v_0 = gt_0 + \sqrt{u_0}, \qquad q_0 = \frac{2E - m(gt_0 + \sqrt{u_0})^2}{2mg}$$

(vi) Wiederholen Sie Teilaufgabe (v) mit dem Potential $V_2 = \frac{k}{2}q^2$.
*Hinweis: Es wird hier **nicht** von Ihnen erwartet, das auftretende Integral **ohne** die Zuhilfenahme einer Integraltabelle bzw. entsprechender Software zu lösen.*

Again, we firstly solve for the Newton equation. Recall that,

$$m\ddot{q}(t) = -\frac{d}{dq}V(q)$$

for $V(q) = kq^2/2$, we have,

$$\ddot{q}(t) = -\frac{k}{m}q(t)$$

the general solution to the Newton equation is,

$$q(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

On the other hand we have,

$$t - t_0 = \int_{q(t_0)}^{q(t)} \frac{dq(t)}{\sqrt{2[E - kq^2(t)/2]/m}}$$

Rearranging the equation,

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) = \int_{q(t_0)}^{q(t)} dq(t)\, \frac{1}{\sqrt{E}} \left(1 - \frac{k}{2E} q^2(t)\right)^{-1/2}$$

Now we want to perform a change of variable as follow,

$$v = \sqrt{\frac{k}{2E}} q(t)$$

such that,

$$\frac{dv}{dq(t)} = \sqrt{\frac{k}{2E}}$$

Then we have,

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) = \int_{q(t_0)}^{q(t)} \frac{dv}{(1 - v^2)^{1/2}}$$

We further let,

$$v = \sin\theta$$

such that,

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta$$

and we found,

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + \theta_0$$

Finally, we put θ back into v and express it as a function of $q(t)$,

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\left(\omega t + \tilde{\theta}_0\right)$$

where $\omega = \sqrt{k/m}$ and $\tilde{\theta} = \theta_0 + \omega t_0$ This expression is equivalent to solution of Newton equation,

$$q(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t = c_0 \sin\left(\omega t + \psi\right)$$

where $\psi = \tan^{-1}(c_1/c_2) \equiv \tilde{\theta}_0$ and $c_0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \equiv \sqrt{2E/k}$.

Nun wollen wir das Potential

$$V_4(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4}x^4, \text{ mit } \lambda, k > 0, \tag{3}$$

betrachten. Dieses Potential ist nicht nur von entscheidender Bedeutung für die Teilchenphysik, sondern findet auch häufig Anwendung als einfaches Beispiel zur Verdeutlichung einiger quantenmechanischer Phänomene, die hier allerdings noch nicht von Bedeutung sind.

(vii) Skizzieren Sie zunächst das Potential $V_4(x)$ und bestimmen Sie die Lage seiner Extrema. Die beiden Maxima werden wir im Folgenden als $\pm x_m$ bezeichnen, wobei $x_m > 0$ gelte.
The minima/maxima of the potential can be found by setting $V_4'(x) = 0$:

$$0 = kx^2 - \lambda x^3. \tag{4}$$

This equation has three solutions: A minimum, $x = 0$, and two maxima at $x = \pm x_m = \pm\sqrt{\frac{k}{\lambda}}$. The potential energy at these points, which we will need for the next subquestion, is given by $V(\pm x_m) = \frac{k^2}{4\lambda}$. The potential is plotted in Fig.1 for several combinations of k and λ.

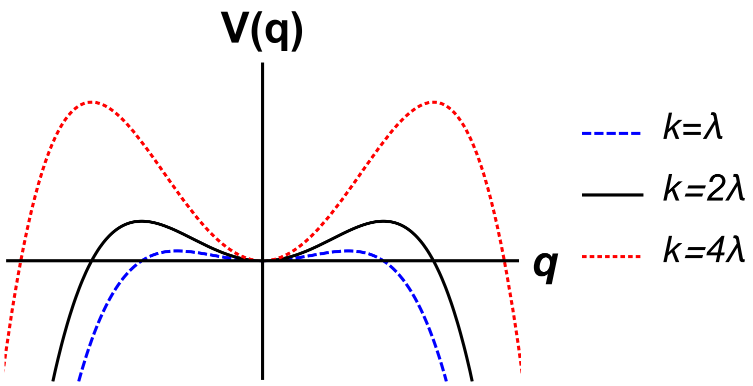

Abbildung 1: Potential $V_4(q)$

(viii) Betrachten Sie nun eine Punktmasse mit den Anfangsbedingungen $-x_m < q_0 < 0$, $E = V_4(x_m)$ sowie $\dot{q}_0 > 0$. Zeigen Sie ausgehend von (1), dass die Bahnkurve dieser Punktmasse die folgende Form annimmt:

$$q(t) = x_m \tanh(a x_m t + b) \tag{5}$$

Wie lauten die Koeffizienten a und b?

Hinweis: Auch hier können und sollten Sie eine Integraltabelle verwenden.

First of all, recall that,

$$t - t_0 = \int_{q(t_0)}^{q(t)} \frac{dq(t)}{\sqrt{2[E - V(q)]/m}}$$

where we have considered the condition $E = k^2/4\lambda$ given by the question. Now, we consider $V(q) = V_4(q)$,

$$t - t_0 = \int_{q(t_0)}^{q(t)} dq(t) \, \sqrt{\frac{m}{2}} \left[\frac{k^2}{4\lambda} + \frac{\lambda}{4} q^4(t) - \frac{k}{2} q^2(t)\right]^{-1/2}$$

After a few rearrangement,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{k^2}{2m\lambda}}(t - t_0) &= \int_{q(t_0)}^{q(t)} dq(t) \, \left[1 + \frac{\lambda^2}{k^2} q^4(t) - \frac{2\lambda}{k} q^2(t)\right]^{-1/2} \\
&= \int_{q(t_0)}^{q(t)} dq(t) \, \left[1 - \frac{\lambda}{k} q^2\right]^{-1}
\end{aligned}$$

and consider a series of change of variable[1],

$$v = \sqrt{\frac{\lambda}{k}} q = \tanh\theta, \qquad \frac{dv}{dq} = \frac{\lambda}{k}, \qquad \frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{\cosh^2\theta}$$

Then we have,

$$\sqrt{\frac{k^2}{2m\lambda}}(t - t_0) = \int_{v(0)}^{v(t)} dv \, \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \frac{1}{1 - v^2} = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta \sqrt{\frac{k}{\lambda}}$$

This gives,

$$\theta = \sqrt{\frac{k}{2m}}(t - t_0)$$

for $\sqrt{k/m} \equiv \omega$, rewritting v in terms of $q(t)$, we have

$$q(t) = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \tanh\left[\sqrt{\frac{k}{2m}}\, t + \psi\right]$$

[1] Alternatively, you could use that $\int_{v_0}^{v_f} (1 - v^2) dv = \tanh^{-1}(v_f) - \tanh^{-1}(v_i)$, which can be found e.g. in the book by Bronstein.

where ψ is the integration constant to be determined by the initial condition.
It satisfies the initial condition that $t = 0$, $q(0) = q_0$,

$$q_0 = -\sqrt{\frac{k}{\lambda}} \tanh \psi$$

then ψ,

$$\psi = \operatorname{arctanh} \left(-\sqrt{\frac{\lambda}{k}} q_0 \right)$$

so that the solution,

$$q(t) = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \tanh \left[\sqrt{\frac{k}{2m}}\, t + \operatorname{arctanh} \left(-\sqrt{\frac{\lambda}{k}} q_0 \right) \right]$$

(ix) Diskutieren Sie den Fall $q_0 \to -x_m$.
For $q_0 \to -q_m = -\sqrt{\frac{k}{\lambda}}$,

$$\psi = \lim_{x \to 1} \operatorname{arctanh}(x) = \infty$$

This means that,

$$q(t) = \lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \tanh \left[\sqrt{\frac{k}{2m}}\, t + \operatorname{arctanh}(x) \right] \approx \sqrt{\frac{k}{\lambda}}$$

This implies that a point mass starting at $q_0 = -q_m$ becomes time independent, or stationary at $-q_m$.
This is understandable because the point mass is located at an unstable equilibrium.

2 Lipschitz Bedingungen

Überprüfen Sie ob folgende Funktionen auf den angegebenen (reellen) Definitionsbereichen eine Lipschitz-Bedingung erfüllen oder nicht.

(i) $f(t,x) = \ln(1 + e^{tx})$ auf $[0,1) \times (0,1)$

(ii) $g(t,x) = \sqrt{x}$ auf $[0,2) \times (1,4)$

(iii) $h(t,x) = x^{1/3}$ auf $[0,1) \times [0,x_0), 0 < x_0$

A function $f : D \to \mathbb{R}$ satisfy the Lipschitz condition, or *Lipschitz continuous*, in the domain D if there is a constant M for all $x, y \in [a,b]$, such that,

$$||f(x) - f(y)|| \leq M\, ||x - y||$$

and f is denoted as the Lipschitz function. Now, suppose f is a real-valued function and differentiable on an interval $I \subset \mathbb{R}$. If f' is bounded on I, then f' is a Lipschitz function on I.

(i) $f(t,x) = \ln(1 + e^{tx})$ auf $[0,1) \times (0,1)$
First of all, $f'(t,x)$ on each $(t,x) \in [0,1) \times (0,1)$ is,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{t}{1 + e^{tx}}$$

We can proof that f is Lipschitz continuous on $[0,1) \times (0,1)$ by showing that f' is bounded.

$$\left|\left| \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \right|\right| = \operatorname*{Sup}_{t \in [0,1), x \in (0,1)} \left| \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \right| = \lim_{t \to 1, x \to 0} \left| \frac{t}{1 + e^{tx}} \right| = \frac{1}{2}$$

Thus $f(t,x)$ is a Lipschitz function on $(t,x) \in [0,1) \times (0,1)$ thus Lipschitz continuous within the interval with $M = 1/2$.

(ii) $g(t,x) = \sqrt{x}$ auf $[0,2) \times (1,4)$.

For $g'(t,x)$ on each $(t,x) \in [0,2) \times (1,4)$,

$$\left\|\frac{dg(t,x)}{dx}\right\| = \underset{t\in[0,2),x\in(1,4)}{\text{Sup}} \left|\frac{dg(t,x)}{dx}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{2}$$

Sinec $g'(t,x)$ is bounded. We conclude that $g(t,x)$ is a Lipschitz function on $[0,2) \times (1,4)$ and thus Lipschitz continuous within the interval with $M = 1/2$.

(iii) $h(t,x) = x^{1/3}$ auf $[0,1) \times [0,x_0), 0 < x_0$

The function $h(t,x)$ is not Lipschitz continuous on $[0,1) \times [0,x_0)$, because $h'(t,x)$ approaches infinity when $h(t,x)$ approaches zero. We can show that $h'(t,x)$ is unbounded on $[0,1) \times [0,x_0)$,

$$\left\|\frac{dh(t,x)}{dx}\right\| = \underset{t\in[0,1),x\in[0,x_0)}{\text{Sup}} \left|\frac{dh(t,x)}{dx}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{3x^{2/3}}\right| = \infty$$

This means that there is no constant M that the Lipschitz condition can be satisfied. Therefore $h(t,x)$ is neither Lipschitz continuous nor a Lipschitz function on $[0,1) \times [0,x_0)$.

3 Picard Lindelöf

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = t^2 + x(t)^2, \quad x(0) = 0 \tag{6}$$

eine eindeutige Lösung auf $[0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ bestitzt und, dass dies das maximale Lösungsintervall ist.
We define $\dot{x}(t) = f(t,x)$ and $f : D \to \mathbb{R}$ for the domain D. Suppose f is Lipschitz continuous with respect to x and continuous in t within the rectangle $R = \{(t,x) : |t-t_0| < a, |x-x_0| < b\}$. Then, given any point (t,x) in R, there exists a unique solution $x(t)$ of the given initial value problem within the interval $[t-\epsilon, t+\epsilon]$ for $\epsilon > 0$.
To find the maximum interval of existence of solution, we need to compute the Lipschitz constant M ,

$$M = \underset{a,b\in R}{\text{Sup}} |f(t,x)| = a^2 + b^2$$

and therefore the interval ϵ is restricted by,

$$\epsilon < \text{Min}\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \text{Min}\left\{a, \frac{b}{a^2+b^2}\right\}$$

To find the maximum interval for of existence of solution, we need to determines a and b so that ϵ is as large as possible. Therefore, we can solve for the largest possible b,

$$\epsilon < \text{Min}\left\{a, \frac{1}{2a}\right\}$$

Then we need to find the largest a for the maximum interval of existence of the solution,

$$\epsilon < \text{Max}_a \text{Min}\left\{a, \frac{1}{2a}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Therefore the maximum interval for the existence of solution is $[0, 1/\sqrt{2})$, where the lower bounder is restricted by $\epsilon > 0$.

4 Kepler Problem - Teil 1

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m, das sich in einem Zentralpotential bewege. Die Newtonsche Gleichung lautet daher:

$$m\ddot{\boldsymbol{q}} = f(|\boldsymbol{q}|)\frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|}. \tag{7}$$

Des Weiteren ist bekannt, dass der Drehimpuls erhalten ist, womit wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit sagen können, dass die Bewegung ausschließlich in der xy-Ebene stattfindet (überlegen Sie, sich weshalb). Dadurch vereinfacht sich die Lösung des Problems erheblich.

(i) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie des Systems durch

$$E = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) + V(r) \tag{8}$$

gegeben ist, wobei $f(r) = -dV/dr$ gilt.

First of all, the total energy of the system is given by $E = T + V(r)$. Take into account that the particle's motion can be regarded as motion confined only in the xy plane, we can assume $\dot{z} = 0$,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))$$

Recall that the spherical coordinate is related to the Cartesian coordinate as follow,

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{bmatrix}$$

Restricting ourself to the motion on the xy plane, we put $\theta = \pi/2$,

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{s}} = \begin{bmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Thus the kinetic energy T,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\Big[(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)^2\Big] \\ &= \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\big) \end{aligned}$$

Then the total energy E is,

$$E = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\big) + V(r)$$

(ii) Nutzen Sie die Drehimpulserhaltung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\phi}) = 0$ um mit Hilfe der Energieerhaltung das Problem auf ein eindimensionales zu reduzieren. Geben Sie das effektive Potential an.

The angular momentum is conserved throughout the entire process, meaning that the angular momentum of the particle is constant over time,

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0$$

which means,

$$mr^2\dot{\varphi} = L$$

where L is the constant denoting the angular momentum of the particle. This allows us to express the angular velocity $\dot{varphi}$ in terms of L,

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$$

Substitute into the kinetic energy of the particle,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

The second term now behaves like a potential of $1/r^2$. It is packed together with the gravitational potential $V(r)$ as an effective potential,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \qquad V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

(iii) Leiten Sie daraus eine Gleichung für $\dot{r}$ her.

We perform the very same calculation as exercise 1. A quick calculation can obtain the following relation between $\dot{r}$ and its energy,

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{\text{eff}}(r)\right]}$$

and if $V(r)$ is given, we can solve for $r(t)$,

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{2[E - V_{\text{eff}}(r)]/m}}$$