Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

Blatt 7

1 Lösungsformel für mechanische Systeme mit einem Freiheitsgrad

Das Lösen der Newton-Gleichung kann sich oftmals als äußerst anspruchsvoll herausstellen. Für Systeme mit nur einem Freiheitsgrad existiert allerdings eine Lösungsformel, durch die sich das Lösen der Gleichung auf die (gegebenenfalls ebenfalls schwierige) Ausführung eines Integrals und das anschließende Lösen einer Gleichung reduzieren lässt. Im Rahmen dieser Aufgabe werden Sie diese Formel herleiten und benutzen, um die Lösung der Bewegungsgleichungen für einige Potentiale explizit zu bestimmen.

(i) Betrachten Sie eine Punktmasse, die sich in einem Potential $V(x)$ bewege. Zeigen Sie, dass aus der zeitlichen Erhaltung der Energie $E = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q)$ die Newton-Gleichung folgt.

Dass die Newton-Gleichung aus der Energieerhaltung hergeleitet werden kann, legt nun den Gedanken nahe, dass diese ebenfalls dazu benutzt werden könnte, die Bewegung der Punktmasse direkt zu bestimmen - d.h. ohne den „Umweg“ über die Newton-Gleichung.

(ii) Leiten Sie, ausgehend vom Ausdruck für die Energie der Punktmasse, die folgende Relation her:

$$t - t_0 = \int_{q_0}^{q(t)} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q))}} \tag{1}$$

Hierbei bezeichne q_0 die Position der Punktmasse zum Zeitpunkt t_0. Dies ist die oben erwähnte Lösungsformel.

(iii) Lösen Sie das Integral zunächst für den trivialen Fall des Potentials $V_0 = 0$ und überprüfen Sie, dass Ihr Ergebnis mit der Lösung der zum System gehörenden Newton-Gleichung übereinstimmt.

(iv) Um die Lösung der Newton-Gleichung eindeutig zu bestimmen, sind zwei Anfangsbedingungen - üblicherweise die Anfangsposition q_0 sowie die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{q}_0$ - notwendig, während Gleichung (1) lediglich die Anfangsposition enthält. Ist es Ihnen trotzdem möglich, eine eindeutige Lösung anzugeben? Falls ja, wieso? Welche zusätzliche Information ist nötig falls nicht?

(v) Betrachten Sie nun eine Punktmasse im Potential $V_1(x) = mgx$. Nutzen Sie (1), um die Bahnkurve der Puntkmasse für beliebige Anfangsbedingungen zu bestimmen. Überprüfen Sie, dass Ihr Ergebnis tatsächlich eine Lösung der Newton-Gleichung ist.

(vi) Wiederholen Sie Teilaufgabe (v) mit dem Potential $V_2 = \frac{k}{2}q^2$.
*Hinweis: Es wird hier **nicht** von Ihnen erwartet, das auftretende Integral **ohne** die Zuhilfenahme einer Integraltabelle bzw. entsprechender Software zu lösen.*

Nun wollen wir das Potential

$$V_4(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4}x^4, \text{ mit } \lambda, k > 0, \tag{2}$$

betrachten. Dieses Potential ist nicht nur von entscheidender Bedeutung für die Teilchenphysik, sondern findet auch häufig Anwendung als einfaches Beispiel zur Verdeutlichung einiger quantenmechanischer Phänomene, die hier allerdings noch nicht von Bedeutung sind.

(vii) Skizzieren Sie zunächst das Potential $V_4(x)$ und bestimmen Sie die Lage seiner Extrema. Die beiden Maxima werden wir im Folgenden als $\pm x_m$ bezeichnen, wobei $x_m > 0$ gelte.

(viii) Betrachten Sie nun eine Punktmasse mit den Anfangsbedingungen $-x_m < q_0 < 0$, $E = V(x_m)$ sowie $\dot{q}_0 > 0$. Zeigen Sie ausgehend von (1), dass die Bahnkurve dieser Punktmasse die folgende Form annimmt:

$$q(t) = x_m \tanh(a x_m t + b) \tag{3}$$

Wie lauten die Koeffizienten a und b?
Hinweis: Auch hier können und sollten Sie eine Integraltabelle verwenden.

(ix) Diskutieren Sie den Fall $q_0 \to -x_m$.

2 Lipschitz Bedingungen

Überprüfen Sie ob folgende Funktionen auf den angegebenen (reellen) Definitionsbereichen eine Lipschitz-Bedingung erfüllen oder nicht.

(i) $f(t,x) = \ln(1+e^{tx})$ auf $[0,1) \times (0,1)$

(ii) $g(t,x) = \sqrt{x}$ auf $[0,2) \times (1,4)$

(iii) $h(t,x) = x^{1/3}$ auf $[0,1) \times [0,x_0), 0 < x_0$

3 Picard Lindelöf

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = t^2 + x(t)^2, \quad x(0) = 0 \tag{4}$$

eine eindeutige Lösung auf $[0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ bestitzt und, dass dies das maximale Lösungsintervall ist.

4 Kepler Problem - Teil 1

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m, das sich in einem Zentralpotential bewege. Die Newtonsche Gleichung lautet daher:

$$m\ddot{\boldsymbol{q}} = f(|\boldsymbol{q}|)\frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|}. \tag{5}$$

Des Weiteren ist bekannt, dass der Drehimpuls erhalten ist, womit wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit sagen können, dass die Bewegung ausschließlich in der xy-Ebene stattfindet (überlegen Sie, sich weshalb). Dadurch vereinfacht sich die Lösung des Problems erheblich.

(i) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie des Systems durch

$$E = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) + V(r) \tag{6}$$

gegeben ist, wobei $f(r) = -dV/dr$ gilt.

(ii) Nutzen Sie die Drehimpulserhaltung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\phi}) = 0$ um mit Hilfe der Energieerhaltung das Problem auf ein eindimensionales zu reduzieren. Geben Sie das effektive Potential an.

(iii) Leiten Sie daraus eine Gleichung für $\dot{r}$ her.