

# Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

## Blatt 6

### 1 Zustände und Beobachtungsgrößen

Jede bekannte, physikalischen Theorie baut auf den Begriffen *Zustand* und *Beobachtungsgröße* auf. In der Vorlesung haben Sie zwei Realisierungen dieser Konzepte im Rahmen der Mechanik kennengelernt, die Sie sich in dieser Aufgabe durch die Diskussion eines konkreten Beispiels veranschaulichen sollen.

Als Beispiel soll uns ein Pendel der Masse  $m$  dienen, das an einem Stab mit fixierter Länge  $l$  im Schwerfeld der Erde aufgehängt sei (siehe Abb.1). Zunächst wollen wir uns auf die Darstellung von Zuständen als Punkte im (Geschwindigkeits-)Phasenraum konzentrieren.

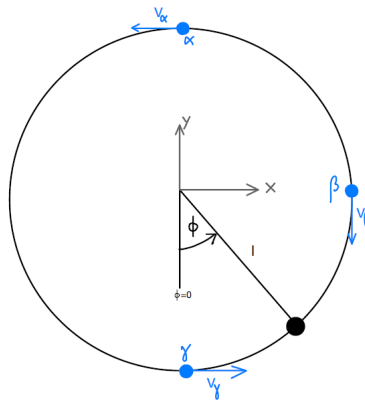


Abbildung 1: Die blauen Punkte symbolisieren die Position des Pendels in den Zuständen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , die dazugehörigen Pfeile die Geschwindigkeit. Die Position des Pendels kann durch den Polarwinkel  $\phi$  beschrieben werden.

- (i) Geben Sie den Konfigurations- und (Geschwindigkeits-)Phasenraum dieses Systems in Polarkoordinaten an und skizzieren Sie diese.

The configuration space  $Q$  is the set of all possible values of the system's spatial coordinates. The position of the pendulum is described by the angle  $\phi$ , which can take any value between  $0$  and  $2\pi$ . Thus,  $Q = [0, 2\pi)$ .

The (velocity) phase space is the set of all possible configurations/states, which are characterized by the system's coordinates and its coordinate velocities. In the case of the pendulum, the only coordinate velocity is  $\dot{\phi}$ , which can take any real value. Thus,  $P = [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ .

- (ii) Betrachten Sie die drei in Abb. 1 dargestellten Konfigurationen. Ergänzen Sie Ihre Skizze aus Aufgabe (i) um die Zustände, die diese Konfigurationen beschreiben. Diese Zustände werden wir als  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  bezeichnen.

The state for configuration  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  is as follow,

$$\begin{aligned}\alpha &= (\pi, l|v_\alpha) \\ \beta &= (\pi/2, -l|v_\beta) \\ \gamma &= (0, l|v_\gamma)\end{aligned}$$

If we let  $|v_\alpha| = |v_\beta| = |v_\gamma| = 1$ , then the state for configuration  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  on the phase space is plotted simply in Figure 2.

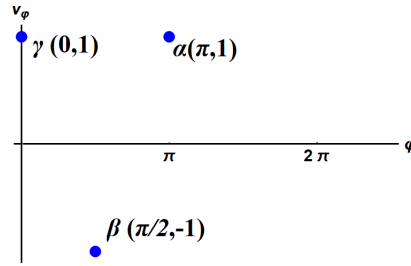


Abbildung 2: Three states in the phase space

(iii) Geben Sie die Abbildungsvorschriften an, die es erlauben, die folgenden Beobachtungsgrößen als Funktionen auf dem Phasenraum darzustellen:

- Potentielle Energie  $V$ , wobei für ein senkrecht hängendes Pendel  $V = 0$  gelten soll.
- Kinetische Energie  $T$
- Geschwindigkeit in x-Richtung  $v_x$

Überprüfen Sie, dass diese tatsächlich die in der Vorlesung diskutierten Bedingungen an Beobachtungsgrößen erfüllen. For the Potential energy  $V$ , Kinetic energy  $T$  and x-direction velocity  $v_x$ :

$$V : P \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\phi, \dot{\phi}) \mapsto mgl(1 - \cos \phi),$$

$$T : P \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\phi, \dot{\phi}) \mapsto \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2,$$

$$v_x : P \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\phi, \dot{\phi}) \mapsto l \dot{\phi} \cos \phi.$$

In the lecture notes, observables [Beobachtungsgrößen] are defined as quantities which satisfy the following conditions:

- The observables of a mechanical system are precisely the continuous, real-valued functions on the phase space of the system.
- There exists a measurement rule for them. (This aspect is not of interest within this course.)

The first condition is satisfied because  $\cos(\phi)$  and  $\sin(\phi)$  are real-valued continuous functions.

The second condition is also satisfied, since all these quantities can be measured, as you know from the E1 lecture.

(iv) In der Vorlesung wurde diskutiert, dass die Beobachtungsgrößen der Mechanik eine *kommutative Algebra* bilden. Welche der Eigenschaften einer solchen Algebra haben Sie bei der Konstruktion der Beobachtungsgrößen in Teilaufgabe (iii) benutzt? Welche Rolle spielt die Vollständigkeit der Algebra? We have used the addition operation (+) to define the potential energy, and the multiplication operation ( $\cdot$ ) onto real numbers for constructing the kinetic energy as well as the velocity in x-direction. As you know from your T0 course, both  $\sin \phi$  and  $\cos \phi$  can be written as a convergent series in  $\phi$ . Each of the terms of these series' would, on its own, form an observable. The fact that both  $\sin \phi$  and  $\cos \phi$  are also observables is nothing but a manifestation of the algebra's completeness.

*Remark by Thomas: If you don't see the point of even discussing completeness right now, you are right. In the context of mechanical observables, completeness follows trivially. This is however not the case for any theory, as you might see next semester in your quantum mechanics lecture.*

(v) Bestimmen Sie die Norm der drei Beobachtungsgrößen aus Teilaufgabe (iii).

$$\|V\| = mgl \text{Sup}_{(\phi, \dot{\phi}) \in P} \{|1 - \cos \phi|\} = 2mgl$$

$$\|T\| = \frac{1}{2}m \text{Sup}_{(\phi, \dot{\phi}) \in P} \{\dot{\phi}^2\} \rightarrow \infty$$

$$\|v_x\| = l \text{Sup}_{(\phi, \dot{\phi}) \in P} \{|\dot{\phi} \cos \phi|\} \rightarrow \infty$$

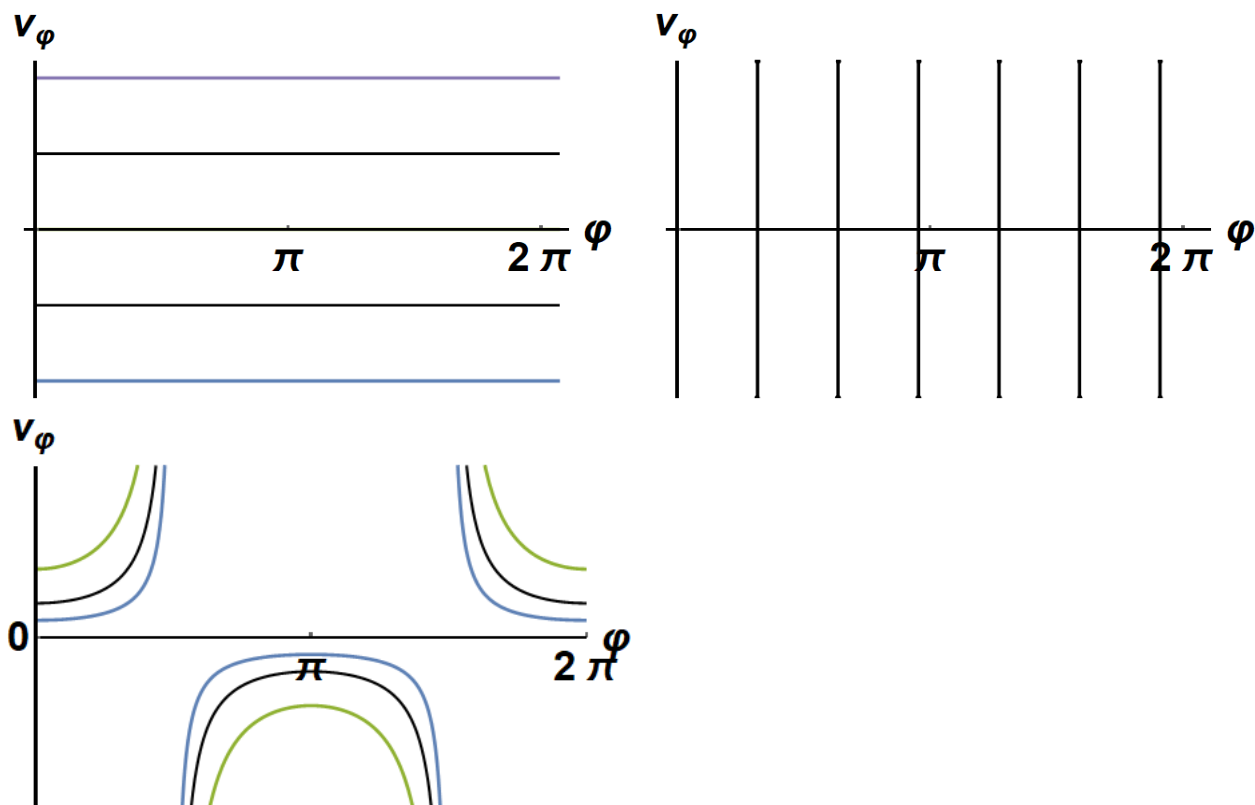


Abbildung 3: Lines of constant kinetic energy, constant potential energy and constant  $v_x$ , excluding  $\sin \varphi = 0$ .

- (vi) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Abbildungen aus Teilaufgabe (iii) im Phasenraum. Könnten Sie alleine aus dieser Skizze, ohne eine Rechnung, die Norm der drei Beobachtungsgrößen ablesen?

See Figure 3.

One can find that  $T$  and  $v_x$  are unbounded from these figures, while  $V$  is restricted to finite values.

Wir wollen nun auf eine weitere Möglichkeit, Zustände und Observablen in der Mechanik zu definieren, eingehen. Bisher haben wir eine Beobachtungsgröße als eine Abbildung verstanden, die jedem Zustand den Wert der ihr entsprechenden physikalischen Größe zuordnet. Genauso gut ist es allerdings möglich, ein physikalisches System als eine Abbildung zu verstehen, die jeder Beobachtungsgröße den Wert zuweist, den man erhalten würde, wenn man sie in besagtem System misst. Formal entspricht dies einer Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} : \mathcal{O} &\rightarrow \mathbb{R} \\ B &\mapsto \mathcal{Z}(B) \end{aligned} \quad (1)$$

$\mathcal{Z}$  bezeichne hier den Zustand des zu beschreibenden Systems,  $B$  eine beliebige Beobachtungsgröße, und  $\mathcal{Z}(B)$  den Wert der Beobachtungsgröße für das System. In der Vorlesung haben Sie insbesondere auch den Übergang zwischen diesen beiden Perspektiven kennengelernt: Es wurde gezeigt, dass sich jedem Phasenraumpunkt  $\psi$  ein äquivalenter Zustand  $\mathcal{Z}_\psi$  im Sinne von (1) zuordnen lässt, sodass für alle Beobachtungsgrößen gilt, dass

$$\mathcal{Z}_\psi(B) = B(\psi). \quad (2)$$

Dies bedeutet nichts anderes, als dass die Abbildung  $\mathcal{Z}_\psi$  der Beobachtungsgröße den Wert zuweist, den man an einem System im Zustand  $\psi$  messen würde. Im Folgenden werden Sie sehen, wie genau diese Formulierung im Falle unseres konkreten Beispiels aussieht.

- (vii) Gegeben sei ein Zustand  $\mathcal{Y}$ , der wie folgt auf die Beobachtungsgrößen  $V$  und  $v_x$  wirke:

$$\mathcal{Y}(V) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) mgl, \quad \mathcal{Y}(v_x) = 2\frac{l}{s}, \quad (3)$$

wobei  $s$  eine Sekunde bezeichne.

Skizzieren Sie die Konfigurationen des Pendels, die dieser Zustand beschreiben könnte, und geben Sie

die entsprechenden Phasenraumpunkte an.

We are searching for the point  $y = (\varphi, \dot{\varphi})$  in phase space, for which  $\mathcal{Y} = \mathcal{Z}_y$ . In terms of  $y$ , the equations (3) take the form

$$\mathcal{Y}(V) = (1 - \cos \varphi)mgl = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)mgl, \quad \mathcal{Y}(v_y) = l\dot{\varphi} \sin \phi.$$

this implies  $\varphi \in \{\pi/4, \frac{7}{4}\pi\}$  and  $\dot{\varphi} = 2\sqrt{2}\frac{1}{s}$  (for  $\pi/4$ ) and  $\dot{\varphi} = -2\sqrt{2}\frac{1}{s}$  (for  $\frac{7}{4}\pi$ ). The state in terms of phase space point is,  $(\pi/4, 2\sqrt{2}\frac{1}{s})$  and  $(\frac{7}{4}\pi, -2\sqrt{2}\frac{1}{s})$ . See Figure 4 of the pedulum configuration.

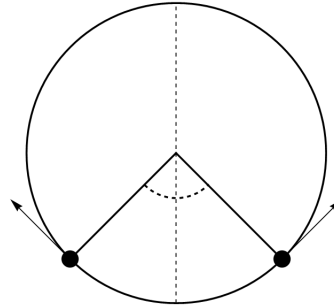


Abbildung 4: Two possible configuration of the pendulum, with two arrows representing two possible  $\dot{\varphi}$ .

- (viii) Bestimmen Sie  $\mathcal{Y}(v_x)$  und  $\mathcal{Y}(T)$ .  
For  $\mathcal{Y}(v_x)$ ,

$$\mathcal{Y}(v_x) = v \cos \varphi = \pm 2\frac{l}{s}$$

and  $\mathcal{Y}(T)$ ,

$$\mathcal{Y}(T) = 4m\frac{l^2}{s^2}$$

- (ix) Die Werte wie vieler Beobachtungsgrößen müssten Sie mindestens messen, um den Zustand dieses Systems vollständig und eindeutig bestimmen zu können? Was muss für diese gelten, und warum sind die Werte in (3) unzureichend?

At least 2 observable are need to determine the state of this system completely and unambiguously.

The necessary condition is that, these two observable must be invertible. For example, for observable  $\mathcal{A}(\phi, \dot{\phi})$  and  $\mathcal{B}(\phi, \dot{\phi})$ , the observable  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  is invertible in the sense that it can be written as,  $\phi(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  and  $\dot{\phi}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . The trivial example would be  $\phi$  and  $\dot{\phi}$ .

Since  $V$  and  $v_x$  is a function of  $\cos \phi$ , they are not invertible to  $\phi$  and  $\dot{\phi}$ . For this reason, knowing only  $V$  and  $v_x$  does not determine the state of this system completely.

## 2 Harmonischer Oszillator mit Reibung

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator der Masse  $m$ , Eigenfrequenz  $\omega$  und Reibungsterm  $k$ , dessen Bahnkurve  $\gamma(t)$  durch die Newton-Gleichung beschrieben werde,

Consider a harmonic oscillator of mass  $m$ , natural frequency  $\omega$  and friction term  $k$ , whose trajectory  $\gamma(t)$  is described by the Newton equation,

$$-k\dot{\gamma}(t) - \omega^2\gamma(t) = F(t). \quad (4)$$

Der dynamische Zustand des Systems lässt sich eindeutig durch die Angabe eines Punktes im Phasenraum charakterisieren.

- (i) Schreiben Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die Variablen  $x$  und  $p = m\dot{x}$  um.

The second order differential equation from equation 4 is as follow,

$$-k\dot{x}(t) - \omega^2 x(t) = m\ddot{x}(t)$$

Rewriting it into in a system of first order differential equation,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{k}{m^2}p - \frac{\omega^2}{m}x\end{aligned}$$

In matrix representation,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^{-1} & 0 \\ -\omega^2/m & -k/m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

- (ii) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $p(0) = 0$ .

For periodical oscillations, one can in general consider the following ansatz,

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$$

for  $c_1$  is a constant coefficient. Plug this into our second order differetnial equation,

$$c_1(m\lambda_1^2 + k\lambda_1 + \omega^2) = 0$$

Since  $c_1$  can be any constant non-zero coefficient, the only possible zero component is,

$$0 = m\lambda^2 + k\lambda + \omega^2$$

This is the characteristic equation showing the possible values of  $\lambda$ ,

$$\lambda = -\frac{1}{2m} \left( k \mp \sqrt{k^2 - 4m\omega^2} \right) \equiv -\frac{1}{2m} (k \mp \Delta)$$

For  $k^2 \neq 4m\omega^2$ , there are two possible values of  $\lambda$ , and each corresponds to a solution independent to each other. By the principle of superposition, the linear combination of two solutions is in general also a solution to our second order differential equation,

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

with the root of the characteristic equation as,

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2m}(k + \Delta), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2m}(k - \Delta)$$

The oscillation ansatz can be fixed uniquely by the initial condition  $x(0) = x_0$  and  $p(0) = 0$ ,

$$c_1 = \frac{x_0}{2} \left( \frac{k}{\Delta} - 1 \right) \quad c_2 = \frac{x_0}{2} \left( \frac{k}{\Delta} + 1 \right)$$

In the absence of friction,  $k = 0$ , we recover the harmonic oscillator with  $\lambda$  as follow,

$$\lambda = \pm \frac{\omega}{\sqrt{m}}$$

and,

$$c_1 = c_2 = \frac{x_0}{2}$$

Now we begin to analysis cases where  $k \neq 0$  and  $k^2 < 4m\omega^2$  ( $\Delta < 0$ ). Even the constant coefficients  $c_1$  and  $c_2$  are complex at the first glance, we can rearrange our solution into an oscillatory real-valued function as follow,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-kt/2m} \left[ \cos \frac{\tilde{\Delta}t}{2m} + \frac{k}{\tilde{\Delta}} \sin \frac{\tilde{\Delta}t}{2m} \right] \\ &= \tilde{X}_0 e^{-kt/2m} \cos \left( \frac{\tilde{\Delta}t}{2m} - \tilde{\phi}_0 \right) \end{aligned}$$

where we defined  $\tilde{\Delta} = \Delta/i = \sqrt{4m\omega^2 - k^2}$ , and

$$\tan \tilde{\phi}_0 = \frac{k}{\tilde{\Delta}}, \quad \tilde{X}_0 = x_0 \sqrt{1 + \frac{k^2}{\tilde{\Delta}^2}}$$

Similarly, for  $k^2 > 4m\omega^2$  ( $\Delta > 0$ ),

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-kt/2m} \left[ \cosh \frac{\Delta t}{2m} + \frac{k}{\Delta} \sinh \frac{\Delta t}{2m} \right] \\ &= X_0 e^{-kt/2m} \sinh \left( \frac{\Delta t}{2m} + \phi_0 \right) \end{aligned}$$

where,

$$\tanh \phi_0 = \frac{\Delta}{k}, \quad X_0 = x_0 \sqrt{\frac{k^2}{\Delta^2} - 1}$$

However, for the special case,  $k^2 = 4m\omega^2$ , or  $\Delta = 0$ , there is only one possible value of  $\lambda$ , but a second order differential equation has two degree of freedom, which expect the general family of solutions to have two arbitrary constants. It can be proved that, the general solution to the second order differential equation with repeated roots are,

$$x(t) = c(t) e^{\lambda t}$$

where  $\lambda = -k/2m$ . One can easily show that  $c(t) = c_1 + c_2 t$ , and the solution for  $\Delta = 0$  becomes:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$$

Again, the constant coefficient  $c_1, c_2$  can be fixed under initial conditions,

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \frac{x_0 k}{2m}$$

- (iii) Zeichnen Sie das Phasenraumportrait des Systems für  $t \geq 0$  im Fall  $4\omega^2 > k^2$  und im Fall  $4\omega^2 \leq k^2$ . Wie sieht die Dynamik des Systems für den jeweiligen Fall aus?

See figure 5. They first regime correspond to a damped system in which the oscillation amplitude decreases and eventually comes to an end. In the second regime there is not even any oscillation anymore.

- (iv) Berechnen Sie die kinetische und potentielle Energie des Systems und diskutieren Sie den Erhalt der Gesamtenergie für  $k = 0$  und  $k \neq 0$ .

The calculation of kinetic and potential energy of the system is purely computational.

#### 1. $k \neq 0, \Delta < 0$

Recall that,

$$x(t) = \tilde{X}_0 e^{-kt/2m} \cos \left( \frac{\tilde{\Delta}t}{2m} - \tilde{\phi} \right)$$

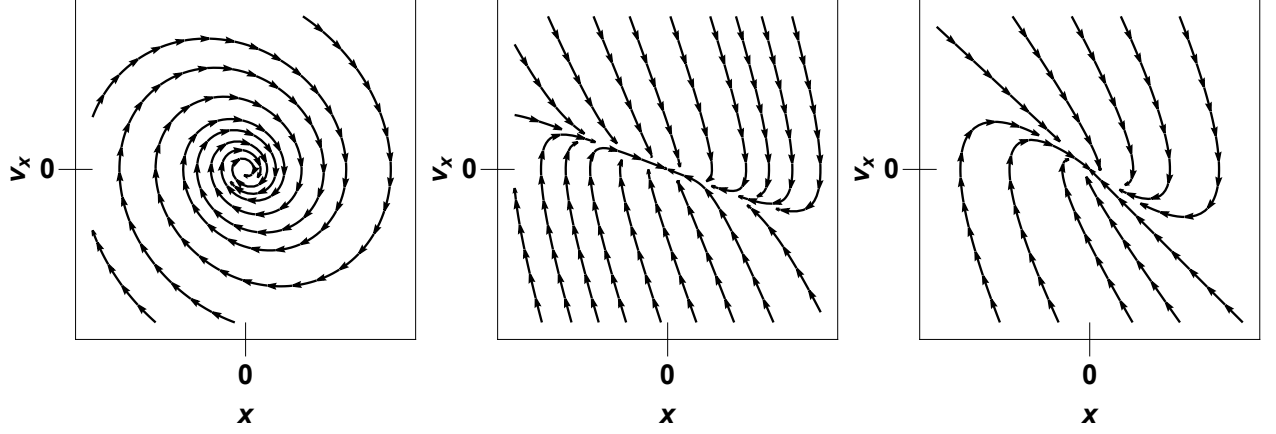


Abbildung 5: Phase space of under damping

Then the potential energy,

$$V = \frac{\tilde{X}_0^2 \omega^2}{2} e^{-kt/m} \cos^2 \left( \frac{\tilde{\Delta} t}{2m} - \tilde{\phi} \right)$$

and kinetic energy,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\tilde{X}_0^2}{8m} e^{-kt/m} \left[ -\tilde{\Delta} \sin \left( \frac{\tilde{\Delta} t}{2m} - \tilde{\phi}_0 \right) - k \cos \left( \frac{\tilde{\Delta} t}{2m} - \tilde{\phi}_0 \right) \right]^2 \\ &= \frac{\tilde{X}_0^2 \tilde{A}^2}{8m} e^{-kt/m} \cos^2 \left( \frac{\tilde{\Delta} t}{2m} - \tilde{\phi}_0 - \tilde{\psi}_0 \right) \end{aligned}$$

where

$$\tilde{A}^2 = \tilde{\Delta}^2 + k^2, \quad \tan \tilde{\psi}_0 = \frac{\tilde{\Delta}}{k}$$

Given the reciprocal argument of inverse trigonometric functions,

$$\arctan \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctanh}(x)$$

we have,

$$T = \frac{\tilde{X}_0^2 \tilde{A}^2}{8m} e^{-kt/m} \cos^2 \left( \frac{\tilde{\Delta} t}{2m} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$2. \quad k \neq 0, \Delta > 0$$

Similarly, recall that,

$$x(t) = X_0 e^{-kt/2m} \sinh \left( \frac{\Delta t}{2m} + \phi_0 \right)$$

with potential energy,

$$V = \frac{X_0^2 \omega^2}{2} e^{-kt/m} \sinh^2 \left( \frac{\Delta t}{2m} + \phi_0 \right)$$

and kinetic energy,

$$\begin{aligned} T &= \frac{X_0^2}{8m} e^{-kt/m} \left[ -k \sinh \left( \frac{\Delta t}{2m} + \phi_0 \right) + \Delta \cosh \left( \frac{\Delta t}{2m} + \phi_0 \right) \right]^2 \\ &= \frac{X_0^2 A^2}{8m} e^{-kt/m} \sinh^2 \left( \frac{\Delta t}{2m} + \phi_0 - \phi_0 \right) \\ &= \frac{X_0^2 A^2}{8m} e^{-kt/m} \sinh^2 \left( \frac{\Delta t}{2m} \right) \end{aligned}$$

where

$$A^2 = k^2 - \Delta^2,$$

$$3. k \neq 0, \Delta = 0$$

Recall that,

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$$

with potential energy,

$$V = \frac{\omega^2}{2} (c_1 + c_2 t)^2 e^{2\lambda t}$$

and kinetic energy,

$$T = \frac{m}{2} [c_2 + (c_1 + c_2 t)\lambda]^2 e^{2\lambda t}$$

In order to find the total energy, one has to sum the kinetic and potential energy. The most easiest case is  $k = 0$ , which is the harmonic oscillator,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t / \sqrt{m})$$

with potential energy,

$$V = \frac{x_0^2 \omega^2}{2} \cos^2(\omega t / \sqrt{m})$$

and kinetic energy,

$$T = \frac{x_0^2 \omega^2}{2} \sin^2(\omega t / \sqrt{m})$$

with total energy  $E = x_0^2 \omega^2 / 2$ .

### 3 Punktmasse auf Kreisbahn

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse  $m$ , dessen Bahnkurve  $\gamma(t)$  durch die Newton-Gleichung beschrieben werde

*Consider a particle of mass whose trajectory  $\gamma(t)$  is described by the Newton equation*

$$m\ddot{\gamma}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (5)$$

wobei die Kraft  $\mathbf{F}(t)$  betragsmässig konstant sei und senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\gamma}(t)$  stehe. Finden Sie die Bahnkurve durch lösen der Newton-Gleichung mittels einer geeigneten Koordinatenwahl und zeichnen Sie das Phasenraumportrait für eine volle Kreisbewegung.

For a circular motion with speed vector  $\dot{\gamma}(t)$  perpendicular to force  $\mathbf{F}(t)$ , the magnitude of acceleration along the radial direction is,

$$\ddot{\gamma}(t) \propto r\dot{\varphi}^2$$

and

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= 0, \\ \dot{\varphi} &= \dot{\varphi} \end{aligned}$$

therefore the phase space of circular motion is simply,



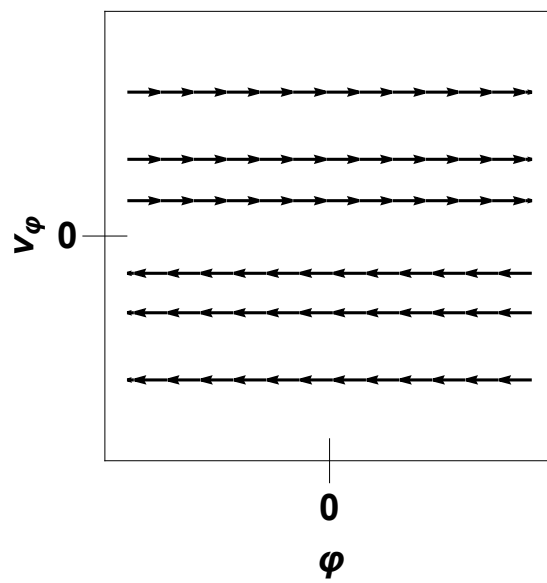


Abbildung 6: Phase space for circular motion in polar coordinate