Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

Blatt 6

1 Zustände und Beobachtungsgrößen

Jede bekannte physikalische Theorie baut auf den Begriffen *Zustand* und *Beobachtungsgröße* auf. In der Vorlesung haben Sie zwei Realisierungen dieser Konzepte im Rahmen der Mechanik kennengelernt, die Sie sich in dieser Aufgabe durch die Diskussion eines konkreten Beispiels veranschaulichen sollen.
Als Beispiel soll uns ein Pendel der Masse m dienen, das an einem Stab mit fixierter Länge l im Schwerefeld der Erde aufgehängt sei (siehe Abb.1). Zunächst wollen wir uns auf die Darstellung von Zuständen als Punkte im (Geschwindigkeits-)Phasenraum konzentrieren.

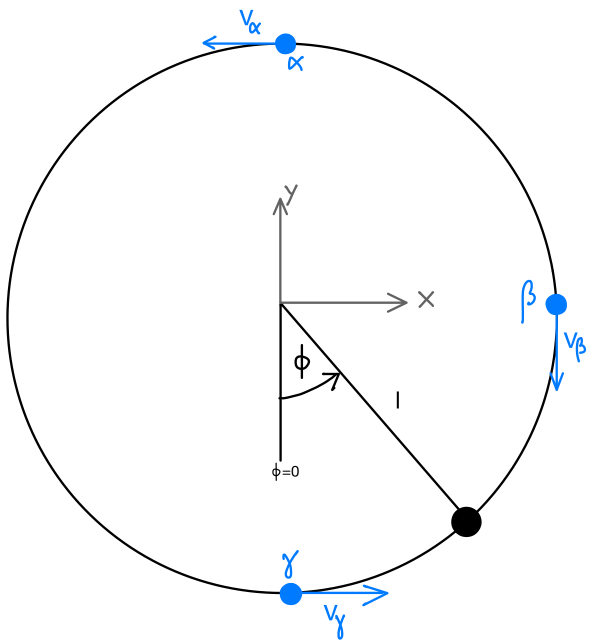

Abbildung 1: Die blauen Punkte symbolisieren symbolisieren die Position des Pendels in den Zuständen α, β und γ, die dazugehörigen Pfeile die Geschwindigkeit. Die Position des Pendels kann durch den Polarwinkel ϕ beschrieben werden.

(i) Geben Sie den Konfigurations- und (Geschwindigkeits-)Phasenraum dieses Systems in Polarkoordinaten an und skizzieren Sie diese.

(ii) Betrachten Sie die drei in Abb. 1 dargestellten Konfigurationen. Ergänzen Sie Ihre Skizze aus Aufgabe (i) um die Zustände, die diese Konfigurationen beschreiben. Diese Zustände werden wir als α, β und γ bezeichnen.

(iii) Geben Sie die Abbildungsvorschriften an, die es erlauben, die folgenden Beobachtungsgrößen als Funktionen auf dem Phasenraum darzustellen:

- Potentielle Energie V, wobei für ein senkrecht hängendes Pendel $V = 0$ gelten soll.
- Kinetische Energie T
- Geschwindigkeit in x-Richtung v_x

Überprüfen Sie, dass diese tatsächlich die in der Vorlesung diskutierten Bedingungen an Beobachtungsgrößen erfüllen.

(iv) In der Vorlesung wurde diskutiert, dass die Beobachtungsgrößen der Mechanik eine *kommutative Algebra* bilden. Welche der Eigenschaften einer solchen Algebra haben Sie bei der Konstruktion der Beobachtungsgrößen in Teilaufgabe (iii) benutzt? Welche Rolle spielt die Vollständigkeit der Algebra?

(v) Bestimmen Sie die Norm der drei Beobachtungsgrößen aus Teilaufgabe (iii).

(vi) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Abbildungen aus Teilaufgabe (iii) im Phasenraum. Könnten Sie alleine aus dieser Skizze, ohne eine Rechnung, die Norm der drei Beobachtungsgrößen ablesen?

Wir wollen nun auf eine weitere Möglichkeit, Zustände und Observablen in der Mechanik zu definieren, eingehen. Bisher haben wir eine Beobachtungsgröße als eine Abbildung verstanden, die jedem Zustand den Wert der ihr entsprechenden physikalischen Größe zuordnet. Genauso gut ist es allerdings möglich, ein physikalisches System als eine Abbildung zu verstehen, die jeder Beobachtungsgröße den Wert zuweist, den man erhalten würde, wenn man sie in besagtem System misst. Formal entspricht dies einer Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} : \mathcal{O} &\to \mathbb{R} \\ B &\mapsto \mathcal{Z}(B) \end{aligned} \tag{1}$$

$\mathcal{Z}$ bezeichne hier den Zustand des zu beschreibenden Systems, B eine beliebige Beobachtungsgröße, und $\mathcal{Z}(B)$ den Wert der Beobachtungsgröße für das System. In der Vorlesung haben Sie insbesondere auch den Übergang zwischen diesen beiden Perspektiven kennengelernt: Es wurde gezeigt, dass sich jedem Phasenraumpunkt ψ ein äquivalenter Zustand $\mathcal{Z}_\psi$ im Sinne von (1) zuordnen lässt, sodass für alle Beobachtungsgrößen gilt, dass

$$\mathcal{Z}_\psi(B) = B(\psi). \tag{2}$$

Dies bedeutet nichts anderes, als dass die Abbildung $\mathcal{Z}_\psi$ der Beobachtungsgröße den Wert zuweist, den man an einem System im Zustand ψ messen würde. Im Folgenden werden Sie sehen, wie genau diese Formulierung im Falle unseres konkreten Beispiels aussieht.

(vii) Gegeben sei ein Zustand $\mathcal{Y}$, der wie folgt auf die Beobachtungsgrößen V und v_x wirke:

$$\mathcal{Y}(V) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)mgl, \;\; \mathcal{Y}(v_y) = 2\frac{l}{s}, \tag{3}$$

wobei s eine Sekunde bezeichne.
Skizzieren Sie die Konfigurationen des Pendels, die dieser Zustand beschreiben könnte, und geben Sie die entsprechenden Phasenraumpunkte an.

(viii) Bestimmen Sie $\mathcal{Y}(v_x)$ und $\mathcal{Y}(T)$.

(ix) Die Werte wie vieler Beobachtungsgrößen müssten Sie mindestens messen, um den Zustand dieses Systems vollständig und eindeutig bestimmen zu können? Was muss für diese gelten, und warum sind die Werte in (3) unzureichend?

2 Harmonischer Oszillator mit Reibung

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator der Masse m, Eigenfrequenz ω und Reibungsterm k, dessen Bahnkurve $\gamma(t)$ durch die Newton-Gleichung beschrieben werde,

$$-k\dot{\gamma}(t) - \omega^2\gamma(t) = F(t)\,. \tag{4}$$

Der dynamische Zustand des Systems lässt sich eindeutig durch die Angabe eines Punktes im Phasenraum charakterisieren.

(i) Schreiben Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die Variablen x und $p = m\dot{x}$ um.

(ii) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $p(0) = 0$.

(iii) Zeichnen Sie das Phasenraumportrait des Systems für $t \geq 0$ im Fall $4\omega^2 > k^2$ und im Fall $4\omega^2 \leq k^2$. Wie sieht die Dynamik des Systems für den jeweiligen Fall aus?

(iv) Berechnen Sie die kinetische und potentielle Energie des Systems und diskutieren Sie den Erhalt der Gesamtenergie für $k = 0$ und $k \neq 0$.

3 Punktmasse auf Kreisbahn

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, dessen Bahnkurve $\boldsymbol{\gamma}(t)$ durch die Newton-Gleichung beschrieben werde

$$m\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \boldsymbol{F}(t)\,, \tag{5}$$

wobei die Kraft $\boldsymbol{F}(t)$ betragsmässig konstant sei und senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ stehe. Finden Sie die Bahnkurve durch lösen der Newton-Gleichung mittels einer geeigneten Koordinatenwahl und zeichnen Sie das Phasenraumportrait für eine volle Kreisbewegung.