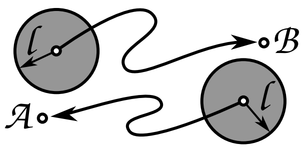
Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

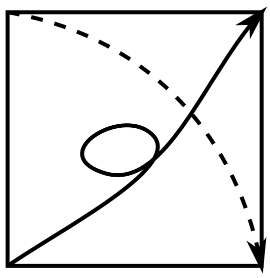
Blatt 5

1 Phasenräume und das Mechanisches Pendel

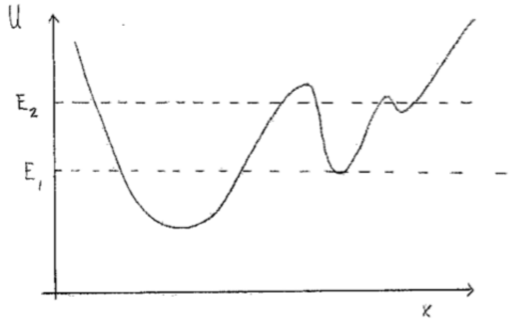
- *Konfigurationsraum* Von der Stadt A in die Stadt B führen zwei Straßen, die sich nicht Schneiden. Es sei bekannt, dass zwei Autos, die durch ein Seil der Länge kleiner $2l$ miteinander verbunden sind, auf verschiedenen Straßen von A nach B fahren können, ohne das Seil zu zerreissen. Können zwei kreisförmige Wagons mit Radius l, deren Mittelpunkte sich entlang der Straßen in entgegengesetzte Richtungen bewegen, aneinander vorbeifahren, ohne sich zu berühren? *Hinweis: Finden Sie eine geeignete Darstellung des Konfigurationsraums und zeichnen Sie die möglichen Trajektorien.*



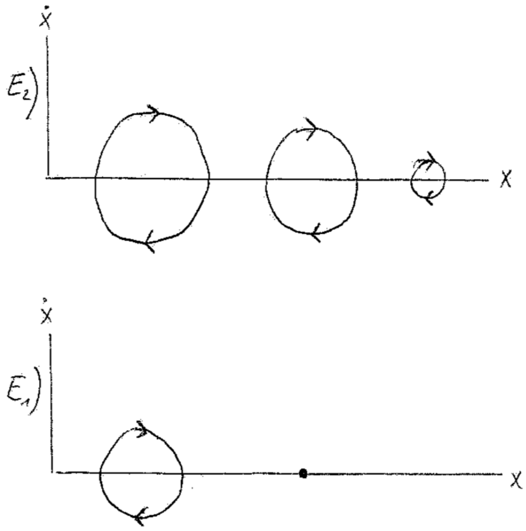
Wir betrachten das Quadrat $M = (x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq 1$. Die Position zweier Fahrzeuge kann man durch einen Punkt des Quadrates M charakterisieren: Es genügt, mit x_i den Anteil des Abstandes von A nach B entlang der i-ten Straße zu bezeichnen, der zwischen A und dem sich auf dieser Straße befindlichen Fahrzeug liegt. Allen möglichen Positionen des Fahrzeuges entsprechen alle Punkte des Quadrates M. Dieses Quadrat heißt Phasenraum und seine Punkte heißen Phasenpunkte. Auf diese Weise entspricht jeder Punkt des Phasenraums wohldefinierten Positionen eines Paares von Fahrzeugen, und jede Bewegung der Fahrzeuge stellt sich als eine Bewegung des Phasenpunktes im Phasenraum dar. Zum Beispiel entspricht die Ausgangsposition der Autos (in der Stadt A) der linken unteren Ecke des Quadrates ($x_1 = x_2 = 0$), und die Bewegung der Autos von A nach B stellt sich als eine Kurve dar, die in die entgegengesetzte Ecke führt. Genauso entspricht die Ausgangsposition der Waggons der rechten unteren Ecke ($x_1 = 0, x_2 = 1$), und die Bewegung der Waggons stellt sich als eine Kurve dar, die in die entgegengesetzte Ecke führt. Aber jedes Paar von Kurven im Quadrat, die verschiedene Paare einander entgegengesetzter Ecken verbinden, hat einen Schnittpunkt. Wie auch immer die Waggons sich bewegen, gibt es deshalb immer einen Moment, in dem die Waggons eine Position einnehmen, in der sich zu irgendeinem Zeitpunkt auch die Autos befunden haben. In diesem Moment ist der Abstand der Mittelpunkte der Waggons kleiner $2l$. Daher kommen sie nicht aneinander vorbei.



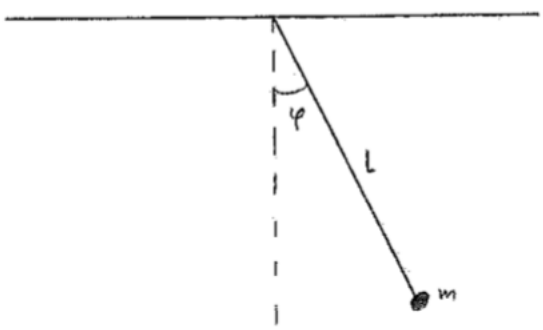
- Betrachten Sie folgende Skizze der potentiellen Energie eines mechanischen Systems. Skizzieren Sie die Phasenkurven der angegebenen Energie-Niveaus.



Lokal sehen die Phasenkurven aus, wie die von harmonischen Oszillatoren, da das Potential eine ähnliche Form hat. Für das Minimum im Energieniveau E_1 nimmt das System eine stabile Lage ein, was durch den Punkt im Graphen dargestellt wird.



- Nun wenden wir uns einem einfachem mechanischen Beispiel zu. Dazu betrachten wir ein einfaches, starres Pendel der Länge l und Masse m, welches sich unter dem Einfluss eines konstanten Schwerefeldes $g \cdot \boldsymbol{e_z}$ befinde. Wir wollen nun für dieses System die Newtonschen Bewegungsgleichungen aufstellen und lösen.



(i) Der Winkel φ bestimmt eindeutig die Lage des Gesamtsystems. Zeigen Sie, dass die Newton Gleichung in diesem Fall $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin(\varphi)$ lautet.

Die Newtonsche Gleichung können wir finden, indem wir die Kräfte des physikalischen Systems betrachten. Die einzige vom System unabhängige Kraft ist die Schwerkraft $F_g = mg$, welche bei Auslenkung des Pendels eine Tangentialkraft $F_{tan}(t) = mg\sin\varphi$ verursacht, die tangential zur Pendelbahn wirkt.

da die Fadenlänge konstant ist und der Faden 'starr' ist, spielt die radiale Komponente der Kraft keine Rolle, da sie lediglich in Richtung des Fadens wirkt. Somit ist das gesamte System durch einen Freiheitsgrad beschrieben, den Auslenkungswinkel ϕ, der Rückstellkraft determiniert. Die Lage des Pendels ist bestimmt durch $\mathbf{x} = l(\sin\varphi, \cos\varphi)^T$. Die Newtonsche Gleichung ist damit gegeben als

$$m\ddot{x} = -m\ddot{\varphi}l = mg\sin\varphi,$$

woraus

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi.$$

(ii) Überlegen sie sich zunächst geometrisch einen Ausdruck für die potentielle Energie $U(\varphi)$. Zeigen sie nun, dass

$$U(\varphi) = -\int_0^\varphi f(x)dx$$

ist, wobei $\ddot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$

Die potentielle Energie wird natürlich proportional zur Höhe des Pendels über seinem Nullpunkt sein, welche durch die y-Komponente der Bewegung gegeben ist. Somit erhalten wir

$$U = -mgl(1-\cos(\varphi)).$$

(Beachten Sie, die Funktion $f(\boldsymbol{x})$ ist bzgl. $\ddot{\boldsymbol{x}}$ und nicht $\ddot{\varphi}$ definiert!) Wir integrieren

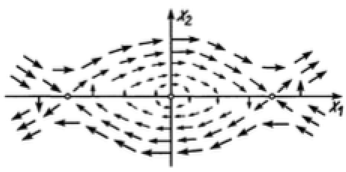
$$\int_0^\varphi dx f(x) \propto \int_0^\varphi d\theta \sin\theta = (\cos\varphi - 1) \Rightarrow U(\varphi) = -mgl(1-\cos\varphi) \tag{1}$$

(iii) Bestimmen sie einen Ausdruck für die kinetische Energie T und zeigen Sie explizit, dass $E = T + U$ erhalten ist.

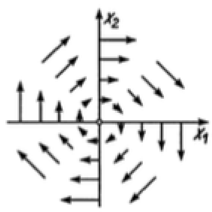
Hier betrachtet man die totale Zeitableitung der Energie, welche im Fall einer erhaltenen Energie verschwinden soll. Die kinetische Energie ist gegeben durch $T = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}| = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$, wobei $\dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{\varphi}l(-\sin\varphi, \cos\varphi)$, somit folgt die Energieerhaltung,

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{d}{dt}\Big[mgl\,(1-\cos\varphi)\Big] \\ &= ml^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgl\dot{\varphi}\sin\varphi \\ &= -mgl\dot{\varphi}\sin\varphi + mgl\dot{\varphi}\sin\varphi = 0.\end{aligned}$$

(iv) Skizzieren Sie einige Bahnen im Phasenraum und vergleichen Sie sie mit den für den Harmonischen Oszillator.



(a) Phasenfluss fur das mechanische Pendel.



(b) Phasenfluss fur den harmonischen Oszillator bzw. Pendel mit mathematisches Pendel mit kleiner Auslenkung

(v) Zeigen Sie, dass für kleine Schwingungen die Bewegungsgleichungen in die des Harmonischen Oszillators übergehen.

Für kleine Schwingungen können wir folgende Kleinwinkelnäherungen annehmen, $\sin\varphi \approx \varphi$, sowie $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2$. Hieraus folgt nun die Beschleunigung

$$\ddot{\varphi} \approx -\frac{g}{l}\varphi,$$

woraus wiederum durch lösen der DGL der Ausdruck

$$\varphi(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi\right),$$

folgt, der wenn wir $\sqrt{\frac{g}{l}} = \omega$ nennen, der übliche Ausdruck für den harmonischen Oszillator ist.

(vi) Gegeben sei wiederum ein Pendel, jedoch sei nun der Aufhängungspunkt beweglich an einer Schiene befestigt. Geben Sie die Freiheitsgrade des Systems an.

2. Winkel des Pendels und die Bewegung des Schienebefestigt

2 Infinitesimale Erzeuger der $SO(3)$-Gruppe

Im Folgenden wollen wir das Konzept der infinitesimalen Erzeuger anhand eines konkreten Beispiels verdeutlichen. Hierzu wollen wir die Gruppe der Rotationen des dreidimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$ betrachten.

(i) Argumentieren Sie zunchst, warum sich Rotationen durch orthogonale Matrizen mit Determinante 1 darstellen lassen. Diese Matrizen bilden die Gruppe $SO(3)$.

$SO(3)$ is the group of all rotation in three-dimensional Euclidean space.

They are transformations, $\mathcal{O}$, which satisfy the condition that,

$$\mathcal{O}^T = \mathcal{O}^{-1}$$

and therefore,

$$\mathcal{O}^{-T}\mathcal{O} = \mathcal{O}^{-1}\mathcal{O} = 1$$

This is simply the set of orthogonality condition in matrix representation. Then, the determinant of the orthogonality conditions can be written as,

$$\det\left(\mathcal{O}^{-1}\mathcal{O}\right) = \det\left(\mathcal{O}^T\mathcal{O}\right) = \det(\mathcal{O})^2 = 1$$

so that,

$$\det\mathcal{O} = \pm 1$$

where $\det(\mathcal{O}) = +1$ or -1 is based on its geometrical significant that: a physical displacement of a rigid body cannot be represented by transformations with $\det(\mathcal{O}) = -1$.
A short explanation of this conclusion is that, the matrix of transformation must evolve continuously from the unit matrix, which has a determinant $+1$. A transformation matrix with determinant -1 is incompatible with the continuity of motion, because it requires the matrix determinant to change suddenly from $+1$ to -1 at some given time.

A longer version of explanation is to look into a particular example of transformations with determinant -1 and examine its nature. An example is inversion, which flips the sign of all coordinate axes. Such matrix transforms a right-handed coordinate system to left-handed, which cannot be accomplished by any rigid change of the coordinate axes. This nature is true for all transformation matrix with determinant -1. It can be shown by demonstrating that any transformation matrix of determinant -1 can be written as the product with transformation matrix with determinant $+1$.

(ii) Wie viele unabhängige Elemente hat eine solche Matrix?

Consider in general a group of transformation equation from a set of coordinate x_i to a new set x'_i for $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

where a_{ij} are in total 9 constant amd independent coefficients. In matrix representation,

$$\mathbf{x'} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

Restricting our discussion to the $SO(3)$ group, the orthogonality condition, $\mathcal{O}^T\mathcal{O} = 1$ implies the following statement,

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \qquad j, k = 1, 2, 3$$

which imposed 6 constrains on $\mathbf{A}$: 3 from $i = j$, and 3 from $i \neq j$.
Since we started with 9 independent coefficients and obtained 6 constrains from the orthogonality condition, there are only 3 independent variables for the $SO(3)$ group.

(iii) Bestimmen Sie explizit die Matrixdarstellungen der Rotationen $R_a(\phi)$ um die x-,y- und z-Achsen, mit $a \in \{x, y, z\}$, als Funktion des Rotationswinkels ϕ. Überprüfen Sie, dass diese Matrizen tatsächlich die Anforderungen aus Teilaufgabe (i) erfüllen.

Now we label our coordinate system according to the question, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$ and $x^3 \equiv z$.
First of all, we restrict ourself to a two dimensional rotation on the xy plane, the transformation matrix $\mathbf{A}$ thus reduces to,

$$\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Now, a two-dimensional transformation from one Cartesian coordinate system to another corresponds to a rotation which can be specified completely by a rotation angle ψ. This can be easily derived by drawing out a rotation of axes counter-clockwisely,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \cos\psi_z\ \boldsymbol{x} - \sin\psi_z\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}' &= \sin\psi_z\ \boldsymbol{x} + \cos\psi_z\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}' &= \boldsymbol{z} \end{aligned}$$

This is,

$$\mathbf{R}_z(\psi_z) = \begin{pmatrix} \cos\psi_z & -\sin\psi_z & 0 \\ \sin\psi_z & \cos\psi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notice that it satisfies the orthogonality condition,

$$\begin{aligned} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} &= 1 \\ a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} &= 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} &= 0 \end{aligned}$$

in terms of matrix elements,

$$\begin{aligned} \cos^2\psi_z + \sin^2\psi_z &= 1 \\ \sin^2\psi_z + \cos^2\psi_z &= 1 \\ -\cos\psi_z\ \sin\psi_z + \sin\psi_z\ \cos\psi_z &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{R}_x$ and $\mathbf{R}_y$ can be derived exactly the same way from the two-dimensional rotation on the plane of yz and zx. In conclusion, we have,

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi_x & -\sin\psi_x \\ 0 & \sin\psi_x & \cos\psi_x \end{pmatrix}, \; \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\psi_y & 0 & \sin\psi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi_y & 0 & \cos\psi_y \end{pmatrix}, \; \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\psi_z & -\sin\psi_z & 0 \\ \sin\psi_z & \cos\psi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Once again it can be proven that $\mathbf{R}_x(\psi_x)$ and $\mathbf{R}_y(\psi_y)$ also satisfies the orthogonality relation.

(iv) Bestimmen Sie die infintesimalen Erzeuger $T_a = \lim_{\phi\to 0} \frac{1}{\phi}\left(R_a(\phi) - \mathrm{Id}\right)$, $a \in \{x, y, z\}$ dieser Rotationen.

According to our question, infinitesimal generators are defined by,

$$T_a = \lim_{\psi\to 0} \frac{1}{\psi_a}\Big(R_a(\psi_a) - \mathrm{Id}\Big)$$

Let us start from the beginning by writing the equation of infinitesimal transformation as,

$$x'_i = x_i + \epsilon_{ij}x_j = (\delta_{ij} + \epsilon_{ij})x_j$$

where we want to sum over repeating indices. In matrix notation,

$$\mathbf{x'} = (\mathbf{1} + \epsilon)\mathbf{x}$$

This is an identity transformation, $\mathbf{1}$, with an infinitesimal operator, ϵ.
Now, we restrict ourself again to a two dimensional rotation. Since the rotation is infinitesimal, we can expand the rotation matrices by Taylor series, take $\mathbf{R}_z$ as example,

$$\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} 1 + \mathcal{O}(\psi^2) & -\psi_z + \mathcal{O}(\psi^3) & 0 \\ \psi_z + \mathcal{O}(\psi^3) & 1 + \mathcal{O}(\psi^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Since we are only interested in the infinitesimal rotation operator, we subtract the identity transformation $\mathbf{1} \equiv \mathrm{Id}$,

$$\epsilon_z = (\mathbf{R}_z - \mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\psi^2) & -\psi_z + \mathcal{O}(\psi^3) & 0 \\ \psi_z + \mathcal{O}(\psi^3) & \mathcal{O}(\psi^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Now we can create the infinitesimal generator, T_a, from our infinitesimal operator, ϵ_z, in according to its definition,

$$T_z = \lim_{\psi\to 0} \frac{1}{\psi_z}\epsilon_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Simiarly, for T_y and T_z,

$$T_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(v) Zeigen Sie, dass $\exp(\phi T_a) = R_a(\phi)$ gilt.
First of all, notice the following property of the generator,

$$T_a = \delta_{ai}\delta_{aj} - \delta_{ij}$$

and therefore,

$$T_a^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We begin with decomposing the rotational martix, for example, $\mathbf{R}_z$,

$$\mathbf{R_z} = \begin{pmatrix} \cos\psi_z & -\sin\psi_z & 0 \\ \sin\psi_z & \cos\psi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id} + (\cos\psi_z - 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sin\psi_z \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Writing explict in terms of T_z,

$$\mathbf{R}_z = \mathrm{Id} + (1 - \cos\psi_z)(T_z)^2 + \sin\psi_z\, T_z$$

Let us begin with the third term, $\sin\psi\, T_z$. Firstly, we expand $\sin\psi_z$ in Taylor series,

$$\sin\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\psi^{2n+1}$$

where $n \geq 0$ and n is an integer. Also notice that,

$$(T_z)^{2n+1} = (-1)^n T_z \tag{3}$$

such that,

$$\sin\psi\, T_z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n T_z}{(2n+1)!}\psi^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(T_z\psi)^{2n+1}$$

For the second term, again we expand $1 - \cos\psi_z$ in Taylor series,

$$1 - \cos\psi_z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\psi_z^{2n}$$

where $n \geq 0$ and n is an integer, we have,

$$(T_z)^{2n} = (-1)^{n+1} T_z^2$$

therefore,

$$(1 - \cos\psi_z)(T_z)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(T_z\psi_z)^{2n}$$

Finally, inserting them back into the infinitesimal rotation,

$$\mathbf{R}_z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(T_z\psi_z)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(T_z\psi_z)^{2n+1}$$

which is actually an exponential function in terms of the infinitesimal generator and the rotation angle,

$$\mathbf{R}_z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(T_z\psi_z)^n = \exp[\psi_z T_z]$$

The same calulation can be carried out for $\mathbf{R}_y$ and $\mathcal{R}_x$ to show each individual T_a,

$$\exp[\phi_a T_a] = \mathbf{R}_a$$

(vi) Berechnen Sie nun $\exp(\omega^a T_a)$.

First of all, writing $w^a = \phi n^a$ with a unit vector n, and compute even and odd powers of of $n^a T_a$.

$$A \equiv n^a T_a = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}.$$

For $(A)^2$,

$$A^2 = \begin{pmatrix} n_x^2 - 1 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 - 1 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 - 1 \end{pmatrix}$$

where we define,

$$A^2 \equiv B - \mathrm{Id}, \qquad B = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{pmatrix}$$

with the property that,

$$BA = 0$$

and,

$$A^3 = (B - \mathrm{Id}) = -A$$

so that, for $n \geq 0$ and n is an integer, we have,

$$A^{2n+1} = (-1)^n A, \qquad A^{2n} = (-1)^{n+1} A^2$$

Now we compute the exponent. What we have to do is to reverse what we have done in the last section,

$$\begin{aligned} \exp(\omega^a T_a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\psi A)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (A\psi)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (A\psi)^{2n+1} \\ &= \mathrm{Id} + (1 - \cos\psi)(A)^2 + \sin\psi A \end{aligned}$$

Rewrite it in terms of B,

$$\exp(\omega^a T_a) = B + A \sin\psi + (\mathrm{Id} - B)\cos\psi$$

This is also known as the Rodrigues' rotation formula.

(vii) Berechnen Sie die Kommutatoren der infinitesimalen Erzeuger, $[T_a, T_b] := T_a T_b - T_b T_a$.

From the matrix form, we see that $(T_a)_{ij} = -\varepsilon_{ija}$. We can compute the commutator as

$$\begin{aligned} [T_a, T_b] &= \varepsilon_{ika}\varepsilon_{kjb} - \varepsilon_{ikb}\varepsilon_{kja} \\ &= -\delta_{ij}\delta_{ab} + \delta_{ib}\delta ja + \delta_{ij}\delta ab - \delta_{ia}\delta_{jb} \\ &= \delta_{ib}\delta_{ja} - \delta_{ia}\delta_{jb} \\ &= -\varepsilon_{cij}\varepsilon_{cab} \\ &= \varepsilon_{abc}(T_c)_{ij}. \end{aligned}$$

This will probably be revealed later in the lecture, which is the angular momentum algebra from the Poisson bracket.

3 C*-Algebren und Beobachtungsgrößen

Die Menge aller Beobachtungsgrößen, Ω, eines Mechanischen Systems über einem gegebenen Phasenraum Γ wurde in der Vorlesung als Vektorraum über den reellen Zahlenkörper eingefürt. Zudem wurde ein Produkt $AB(\Psi) := A(\Psi)B(\Psi)$, $A, B \in \Omega$, und $\Psi \in \Gamma$ definiert.

(i) Zeigen Sie, dass Ω mit obigem Produkt eine Algebra über den reellen Zahlenkörper bildet.

To show that the above product forms an algebra over a real number field, it must hold for the following identities.

$$(AB)C = A(BC),$$
$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(B+C)A = BA + CA$$
$$\alpha\beta(AB) = (\alpha A)(\alpha B)$$

This can be easily shown as follow: firstly it is associative on multiplication,

$$(AB)C(\Psi) = (AB)(\Psi)C(\Psi) = A(\Psi)B(\Psi)C(\Psi)$$

$$A(BC)(\Psi) = A(\Psi)(BC)(\Psi) = A(\Psi)B(\Psi)C(\Psi)$$

thus,

$$(AB)C(\Psi) = A(BC)(\Psi)$$

Secondly, it is left distributive,

$$A(B+C)(\Psi) = A(\Psi)(B+C)(\Psi) = A(\Psi)\Big(B(\Psi) + C(\Psi)\Big) = A(\Psi)B(\Psi) + A(\Psi)C(\Psi)$$

and,

$$(AB + AC)(\Psi) = (AB)(\Psi) + (AC)(\Psi) = A(\Psi)B(\Psi) + A(\Psi)C(\Psi)$$

so that,

$$A(B+C) = AB + AC$$

And thirdly it is also right distributive,

$$(B+C)A(\Psi) = (B+C)(\Psi)A(\Psi) = B(\Psi)A(\Psi) + C(\Psi)A(\Psi)$$

and,

$$(BA + CA)(\Psi) = (BA)(\Psi) + (CA)(\Psi) = B(\Psi)A(\Psi) + C(\Psi)A(\Psi) \tag{4}$$

thus showing,

$$(B+C)A = BA + CA$$

Finally, it is compatible with scalar,

$$\alpha\beta(AB)(\Psi) = \alpha\beta A(\Psi)B(\Psi)$$

$$(\alpha A)(\beta B)(\Psi) = (\alpha A(\Psi))(\beta B(\Psi)) = \alpha\beta A(\Psi)B(\Psi)$$

thus, we have,

$$\alpha\beta(AB) = (\alpha A)(\beta B)$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $||A|| := \text{Sup}\{|A(\Psi)| : \Psi \in \Gamma\}$, eine Norm auf Ω ist.

For $A, B \in \Omega$, and $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, a normed vector space Ω is a vector space equipped with a norm denoted by $||\bullet||$, which is a function $||\bullet|| : [0, \infty)$, such that,

$$||A|| = \text{Sup}\{|A(\Psi)| : \Psi \in \Gamma\}$$

We need to show that it satisfies the condition of definiteness,

$$||A|| = 0, \quad \text{if and only if} \quad A = 0$$

homogeneity,

$$||\lambda A|| = \text{Sup}\{|\lambda A(\Psi)| \, : \Psi \in \Gamma\} = |\lambda| \, \text{Sup}\{|A(\Psi)| : \Psi \in \Gamma\} = |\lambda| \, ||A||$$

and the triangle inequality,

$$\begin{aligned} ||A+B|| &= \text{Sup}\{|A+B| \, (\Psi) : \Psi \in \Gamma\} \leq \text{Sup}\{|A(\Psi)| + |B(\Psi)| : \psi \in \Gamma\} \\ &\leq \text{Sup}\{|A(\Psi)| : \Psi \in \Gamma\} + \text{Sup}\{|B(\Psi)| : \Psi \in \Gamma\} = ||A|| + ||B|| \end{aligned}$$

which is

$$||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$$

Then we show that, the algebra Ω is a normed algebra by showing submultiplicative; that is:

$$\begin{aligned} ||AB|| &= \text{Sup}\{|AB| \, (\Psi) : \Psi \in \Gamma\} = \text{Sup}\{|A(\Psi)| \, |B(\Psi)| : \Psi \in \Gamma\} \\ &\leq \text{Sup}\{|A(\Psi)| : \Psi \in \Gamma\}\text{Sup}\{|B(\Psi)| : \Psi \in \Gamma\} = ||A|| \, ||B|| \end{aligned}$$

such that,

$$||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$$

And for a normed algebra which is complete in the metric induced by the norm is called a Banach algebra.

(iii) Betrachten Sie ein Punktteilchen der Masse m in einem Zylinder der Höhe h, unter dem Einfluss eines homogenen Graviationsfeldes g. Bestimmen Sie die Norm der kinetischen sowie der potenziellen Energie.

The set of observation quantities Ω of a mechanical system $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{P})$ with a compact phase space $\mathbb{P}$ is a C $\star$-algebra, this implies the elements of observable $A, B \in \Omega$ is equipped with an involution and consequently satisfies,

$$||A|| = ||A^*||$$

First of all, we start with defining the space of curve, $\mathcal{K}$, with $\mathcal{I} \supseteq \mathbb{R}, \mathbb{V} \subset \mathcal{P}$ by,

$$\mathcal{K} \equiv \{\gamma \in C^0(\mathcal{I}, \mathbb{V}) : \text{Sup}_{t \in \mathcal{I}} \, ||\gamma(t)|| \, |_{\mathbb{P}} < \infty\}$$

For the potential $U(\gamma)$,

$$U[\gamma] = mg \ \text{Sup}\{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq h\} = mgh$$

For the kinetic energy, K, of the point mass m,

$$\begin{aligned} K[\gamma] &= \frac{m}{2} \text{Sup}_{t \in \mathcal{I}} \ \text{Sup} \ \{|\dot{\gamma}^*(t)\dot{\gamma}(t)| \, (\Psi) : \Psi \in \mathbb{P}\} = \frac{m}{2} \text{Sup}_{t \in \mathcal{I}} \ \text{Sup}\{|\gamma(t)|^2 : \Psi \in \mathbb{P}\} \\ &= \frac{m}{2} \ \text{Sup}_{t \in \mathcal{I}} \ \text{Sup}\{|\gamma(t)| : \Psi \in \mathbb{P}\} \ \text{Sup}\{|\gamma(t)| : \Psi \in \mathbb{P}\} \\ &= \frac{m}{2} \text{Sup}_{t \in \mathcal{I}} \, ||\dot{\gamma}(t)||^2_{\mathbb{P}} \end{aligned}$$