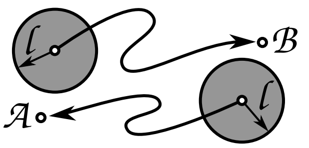
Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

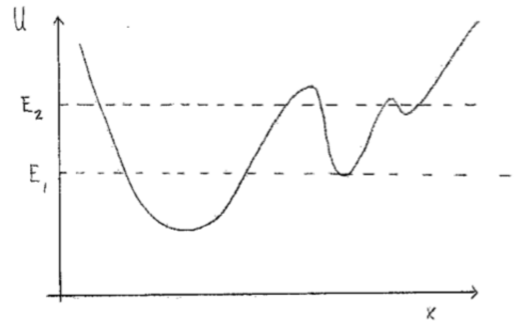
Blatt 5

1 Phasenräume und das Mechanisches Pendel

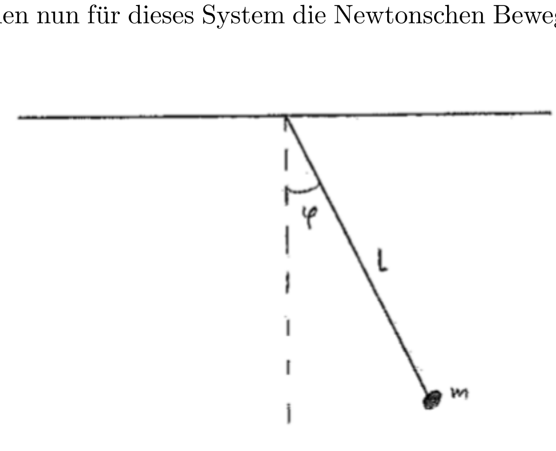
- *Konfigurationsraum* Von der Stadt A in die Stadt B führen zwei Straßen, die sich nicht Schneiden. Es sei bekannt, dass zwei Autos, die durch ein Seil der Länge kleiner $2l$ miteinander verbunden sind, auf verschiedenen Straßen von A nach B fahren können, ohne das Seil zu zerreissen. Können zwei kreisförmige Wagons mit Radius l, deren Mittelpunkte sich entlang der Straßen in entgegengesetzte Richtungen bewegen, aneinander vorbeifahren, ohne sich zu berühren? *Hinweis: Finden Sie eine geeignete Darstellung des Konfigurationsraums und zeichnen Sie die möglichen Trajektorien.*



- Betrachten Sie folgende Skizze der potentiellen Energie eines mechanischen Systems. Skizzieren Sie die Phasenkurven der angegebenen Energie-Niveaus.



- Nun wenden wir uns einem einfachem mechanischen Beispiel zu. Dazu betrachten wir ein einfaches, starres Pendel der Länge l und Masse m, welches sich unter dem Einfluss eines konstanten Schwerefeldes $g \cdot \boldsymbol{e_z}$ befinde. Wir wollen nun für dieses System die Newtonschen Bewegungsgleichungen aufstellen und lösen.



(i) Der Winkel φ bestimmt eindeutig die Lage des Gesamtsystems. Zeigen Sie, dass die Newton Gleichung in diesem Fall $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin(\varphi)$ lautet.

(ii) Überlegen Sie sich zunächst geometrisch einen Ausdruck für die potentielle Energie $U(\varphi)$. Zeigen sie nun, dass

$$U(\varphi) = -\int_0^{\varphi} f(x)dx$$

ist, wobei $\ddot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$

(iii) Bestimmen sie einen Ausdruck für die kinetische Energie T und zeigen Sie explizit, dass $E = T + U$ erhalten ist.

(iv) Skizzieren Sie einige Bahnen im Phasenraum und vergleichen Sie diese mit den für den Harmonischen Oszillator.

(v) Zeigen Sie, dass für kleine Schwingungen die Bewegungsgleichungen in die des Harmonischen Oszillators übergehen.

(vi) Gegeben sei wiederum ein Pendel, jedoch sei nun der Aufhängungspunkt beweglich an einer Schiene befestigt. Geben Sie die Freiheitsgrade des Systems an.

2 Infinitesimale Erzeuger der $SO(3)$-Gruppe

Im Folgenden wollen wir das Konzept der infinitesimalen Erzeuger anhand eines konkreten Beispiels verdeutlichen. Hierzu wollen wir die Gruppe der Rotationen des dreidimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$ betrachten.

(i) Argumentieren Sie zunächst, warum sich Rotationen durch orthogonale Matrizen mit Determinante 1 darstellen lassen. Diese Matrizen bilden die Gruppe $SO(3)$.

(ii) Wie viele unabhängige Elemente hat eine solche Matrix?

(iii) Bestimmen Sie explizit die Matrixdarstellungen der Rotationen $R_a(\phi)$ um die x-,y- und z-Achsen, mit $a \in \{x, y, z\}$, als Funktion des Rotationswinkels ϕ. Überprüfen Sie, dass diese Matrizen tatsächlich die Anforderungen aus Teilaufgabe (i) erfüllen.

(iv) Bestimmen Sie die infintesimalen Erzeuger $T_a = \lim_{\phi\to 0} \frac{1}{\phi}\left(R_a(\phi) - \mathrm{Id}\right)$, $a \in \{x, y, z\}$ dieser Rotationen.

(v) Zeigen Sie, dass $\exp(\phi T_a) = R_a(\phi)$ gilt.

(vi) Berechnen Sie nun $\exp(\omega^a T_a)$.

(vii) Berechnen Sie die Kommutatoren der infinitesimalen Erzeuger, $[T_a, T_b] := T_a T_b - T_b T_a$.

3 C*-Algebren und Beobachtungsgrößen

Die Menge aller Beobachtungsgrößen, Ω, eines mechanischen Systems über einem gegebenen Phasenraum Γ wurde in der Vorlesung als Vektorraum über dem reellen Zahlenkörper eingefürt. Zudem wurde ein Produkt $AB(\Psi) := A(\Psi)B(\Psi), A, B \in \Omega$, und $\Psi \in \Gamma$ definiert.

(i) Zeigen Sie, dass Ω mit obigem Produkt eine Algebra über den reellen Zahlenkörper bildet.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $||A|| := \mathrm{Sup}\{|A(\Psi)| : \Psi \in \Gamma\}$, eine Norm auf Ω ist.

(iii) Betrachten Sie ein Punktteilchen der Masse m in einem Zylinder der Höhe h, unter dem Einfluss eines homogenen Graviationsfeldes g. Bestimmen Sie die Norm der kinetischen sowie der potentiellen Energie.