Übungen zu Theoretischer Mechanik (T1)

Blatt 4

1 Variationsprinzipien: das Hängende Seil

Gegeben sei ein Seil der Länge l und der Dichte ρ dessen Enden an zwei Punkten x_1 und x_2 mit $x_2 - x_1 < l$ auf Höhe h befestigt seien. Nutzen Sie die Methoden aus der Vorlesung um zu bestimmen welche Konfiguration das Seil einnimmt wenn es frei im Erdschwerefeld hängt? Die potentielle Energie für ein Seilsegment ds in kartesischen Koordinaten (x, y) ist durch $y \cdot g \cdot \rho \cdot ds$ gegeben.

In this section, we are instructed to solve it according to the language of the lecture notes. Now we begin with some of the definitions and a quick review.

Firstly let start with something familiar: consider a curve parametrized by x for $\gamma : [x_1, x_2] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{G}$, we begin with the arclength $l[\gamma]$ in Galilei-spacetime $\mathcal{G}$ of coordinate x, y,

$$l[\gamma] = \int_{[x_1,x_2]} dx \;\; ||\dot{\gamma}_{\gamma(x)}||$$

Here $\dot{\gamma}$ is still a directional derivative along the curve, where the dot is currently denoted as d/dx.

Next, we consider a two-parameter mapping $\alpha(x, v)$,

$$\alpha : [x_1, x_2] \times (-\delta, \delta) \to \mathcal{G}$$

for $0 < \delta < \mathcal{R}$, and $\gamma(x) = \alpha(x, 0)$. For $B_\alpha : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^+$, $B_\alpha(v) \equiv l[\alpha_v]$, the first variation of to find the extremum of $B_\alpha(v)$ is,

$$B'_\alpha(0) = \frac{d}{d\nu} B_\alpha \Big|_{\nu=0} = \int_{[x_1,x_2]} dx \, \frac{d}{dv} \, ||\dot{\alpha}|| \, \Big|_{v=0} = \int_{[x_1,x_2]} dx \left\langle \frac{\dot{\gamma}}{||\dot{\gamma}||}, \dot{\alpha}' \right\rangle$$

where $\dot{\alpha}(x, 0) = \dot{\gamma}(x)$. Next, we take away the directional derivative of $\dot{\alpha}'$ through integration by part,

$$B'_\alpha(0) = -\int_{[x_1,x_2]} dx \left\langle \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{\gamma}}{||\dot{\gamma}||}\right), \alpha' \right\rangle + \left\langle \frac{\dot{\gamma}}{||\dot{\gamma}||}, \alpha' \right\rangle \Big|_{x_1}^{x_2}$$

With fixed end point, $\alpha(x_1, v) = \gamma(x_1)$ and $\alpha(x_2, v) = \gamma(x_2)$, such that $\alpha'(x_1) = \alpha'(x_2) = 0$ and therefore the second term vanishes. Now, if the curve section γ is a geodesic of fixed end point, $B'_\alpha(0) = 0$, it is required to fullfill the condition for the existence of an extremum,

$$0 = \int_{[x_1,x_2]} dx \left\langle \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{\gamma}}{||\dot{\gamma}||}\right), \alpha' \right\rangle$$

the above equation needs to be satisfied for geodesic under extremum condition for any possible α'. If the inner product is not degenerated, we come to the conclusion,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{\gamma}}{||\dot{\gamma}||}\right) = 0$$

Now, after our short review, we start answering the question. The string is hanging freely under gravity at a stable equilibrium. This implies that the string is in a configuration with potential energy minimized. Firstly, for its potential energy,

$$U = \int (dm) gy$$

where dm is the mass of an infinitesimal small section of the sting given by,

$$dm = \rho \left|\left|\dot{\gamma}_{\gamma(x)}\right|\right| dx$$

and thus,

$$U[\gamma] = \int_{[x_2, x_1]} dx\, \rho g y(x)\, \left|\left|\dot{\gamma}_{\gamma(x)}\right|\right|$$

In analogy to $B'_\alpha(v)$, we define $W_\alpha(v) \equiv U[\alpha_v]$ for the potential energy. For the first variation, W'_α,

$$\begin{aligned} W'_\alpha(0) = \frac{d}{d\nu} W_\alpha \Big|_{\nu=0} &= \int_{[x_1,x_2]} dx\, \frac{d}{dv}\Big(\rho g\, (y \circ \alpha)\, ||\dot{\alpha}||\Big)\Big|_{v=0} \\ &= \int_{[x_1,x_2]} dx\, \left\langle \rho g y(x) \frac{\dot{\gamma}}{||\gamma||}, \dot{\alpha}' \right\rangle + \int_{x_1,x_2} dx\, \langle\, \rho g\, ||\dot{\gamma}||\, e_y, \alpha'\, \rangle \end{aligned}$$

for clarity, recall that the notation is defined as: $\alpha = \alpha^a e_a$ and $\alpha^a \equiv (x^a \circ \alpha)$. The last line is just product rule, and representing $\alpha^{a\prime}$ from the notation of inner product, $\alpha^{a\prime} = (x^a \circ \alpha)' = \langle e_a, \alpha' \rangle$.
Again, we perform integration by part on the first term, and then demand the end point to be fixed for vanishing boundary term. At the extremum, $B'_\alpha(0) = 0$, now we have,

$$0 = -\int_{[x_1,x_2]} dx\, \rho g \left\langle \frac{d}{dx}\left(y(x)\frac{\dot{\gamma}}{||\dot{\gamma}||}\right), \alpha' \right\rangle + \int_{[x_1,x_2]} dx\, \langle\, \rho g\, ||\dot{\gamma}||\, e_y, \alpha'\, \rangle$$

For the same argument that, the above equation is satisfied for all possible non-vanishing α', thus we have

$$\rho g \frac{d}{dx}\left(y(x)\frac{\langle\, \dot{\gamma}, e_y \rangle}{||\dot{\gamma}||}\right) = \rho g\, ||\dot{\gamma}||$$

plus a trivial equation that is currently useless,

$$\rho g \frac{d}{dx}\left(y(x)\frac{\langle \dot{\gamma}, e_x \rangle}{||\dot{\gamma}||}\right) = 0$$

Das Seil wird stets versuchen seine potentielle Energie zu minimieren, unter der Zwangsbedingung einer konstanten Länge $\ell = \int \sqrt{1+y^2}dx$, minimiert. Die Einbindung der Zwangsbedingung erfolgt über Lagrange Multiplikatoren, wobei es keine Rolle spielt ob wir Funktionale oder Funktionen betrachten, da das Prozedere für beide Fälle identisch ist. Letztlich wollen wir, dass für kleine Variationen in $y(x)$ in der Nähe des Minimums die Änderung von U proportional zur Änderung der Länge l ist. Dies können wir folgendermaßen erklären. Angenommen wir haben die gewünschte Funktion $y(x)$ gefunden, welche U minimiert, und betrachten weiters zwei verschiedene Variationen in $y(x)$, welche die selbe Änderung in l bewirken, jedoch unterschiedliche Änderungen in U. Dann würde die Differenz dieser Variationen, obwohl sie eine nicht verschwindende Änderung in U bewirken, keine Änderung in l zur Folge haben, was wiederum dem Fakt widerspricht, das $y(x)$ uns auf ein Extremum in U führt. Es existiert also eine Linearkombination von U und l, die sich nicht ändert, in erster Ordnung einer Variation nach $y(x)$. Anders ausgedrückt, die funktion

$$\rho g \frac{d}{dx}\left((y(x)+h)\frac{\langle\, \dot{\gamma}, e_y \rangle}{||\dot{\gamma}||}\right) = \rho g\, ||\dot{\gamma}||$$

Nun folgt nach ein paar Umformungsschritten, wobei die Produktregel auf der linken Seite, und unter mehrfacher Anwendung der Kettenregel,

$$\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{(y+h)y''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{(y+h)y'^2 y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \sqrt{1+y'^2}.$$

Multiplizieren wir diesen Ausdruck nun mit $(1+y'^2)^{3/2}$ und vereinfachen, so erhalten wir,

$$(y+h)y'' = \left(1+y'^2\right).$$

welche wir nun integrieren müssen. Multiplizieren wir mit y' und stellen die Gleichung geschickt um, so finden wir

$$\frac{y'y''}{1+y'^2} = \frac{y'}{y+h}.$$

Integrieren wir nun beide Seiten nach dx, so erhalten wir $(1/2)\ln(1+y'^2) = \ln(y+h)+c$. Exponetieren wir nun, wobei $\alpha \equiv e^c$ gilt, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$1 + y'^2 = \alpha^2(y+h)^2.$$

Durch Separation der Variablen erhalten wir nun,

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2(y+h)^2 - 1}}.$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass das Integral von $1/\sqrt{z^2-1}$ genau der $\cosh^{-1}$ ist, finden wir letztendlich

$$y(x) = \frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha x).$$

Somit haben wir gezeigt, dass die Form des hängenden Seiles durch eine Kosinus Hyperbolicus Funktion beschrieben wird. Die h können wir hier ignorieren (es würde als zusätzlich zu y addierte Konstante auftreten), da es lediglich eine Aussage über die urspüngliche Höhe des Aufhängungspunktes des Seiles trifft und verschwindet wenn wir $y'(x)$ betrachten, damit haben wir es als Lagrange Multiplikator identifiziert, was bereits eingangs vermutet wurde.

2 Alternative Formulierung der Variation

In der Physik, und insbesondere auch in der Mechanik, werden Sie häufig mit der Aufgabe konfrontiert werden, ein *Funktional* F zu minimieren. Im Kontext der Mechanik bedeutet dies in den allermeisten Fällen, eine Bahnkurve γ_0 zu finden, für die ein gegebenes Funktional seinen minimalen/maximalen Wert annimmt. In der Vorlesung haben Sie eine Herangehensweise an dieses Problem kennengelernt, deren grundsätzliche Idee Ihnen aus der Analysis bereits bekannt sein dürfte. Anstatt das Funktional von Interesse, die Kurvenlänge, lediglich für eine einzelne Bahnkurve zu betrachten, ist es möglich eine Familie von Kurven zu betrachten, die durch einen Parameter ν gekennzeichnet sind. Hierdurch lässt sich die Frage, für welche Bahnkurve $\alpha(t,\nu) \equiv \alpha_\nu(t)$ *innerhalb der betrachteten Familie* das Funktional extremalisiert wird, umformulieren zur Frage, für welchen Wert ν_0 die Funktion $F_\alpha(\nu) := F[\alpha_\nu]$ ihren Extremalwert annimmt. Diese Bedingung lässt sich alternativ ausdrücken als

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu}F_\alpha(\nu)\right)_{\nu=\nu_0} = 0. \tag{1}$$

Im Rahmen dieser Aufgabe werden Sie eine alternative Herangehensweise an Probleme dieses Typs kennenlernen, die eine große konzeptionelle Ähnlichkeit mit einer Taylorreihenentwicklung aufweist, und der sie auch in der Literatur häufig begegnen werden.

(i) Betrachten Sie eine beliebige Funktion $g(x)$. Zeigen Sie zunächst, dass g genau dann ein Extremum an der Stelle x_0 besitzt, wenn für alle Δx gilt, dass

$$g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + O(\Delta x^2). \tag{2}$$

Let start with an example, considering a system with potential energy with only spatial dependence, $g(x^1, ..., x^n)$. The system is said to be in stable/unstable equilibrium at the extremum,

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} = 0$$

Consider an infinitesimal disturbance, $\Delta\boldsymbol{x}$ to the equilibrium at x_0^i, for $i = 1, ..., n$,

$$x^i = x_0^i + \Delta x^i$$

Then expanding the potential energy, $g(\boldsymbol{x})$ around it's equilibrium x_0^i by Taylor series,

$$g(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}g(\boldsymbol{x})\right)\Big|_{\boldsymbol{x}_0}\Delta x^i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}g(\boldsymbol{x})\right)\Big|_{\boldsymbol{x}_0}\Delta x^i\Delta x^j + \mathcal{O}(\Delta\boldsymbol{x}^3)$$

where $\mathcal{O}(\Delta)^3$ is in general the higher order terms of a Taylor series.
Now, if we apply the equilibrium condition (or the extremum) into the Taylor series, the first order derivative vanishes and we have equation 2,

$$g(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}_0) + \mathcal{O}(\Delta\boldsymbol{x}^2)$$

Diese Charakterisierung wollen wir nun auf Funktionale verallgemeinern. Im Folgenden betrachten wir zunächst ein Funktional der Form

$$F[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ f(q(t)), \tag{3}$$

mit einer nicht näher spezifizierten Funktion f.

(ii) Betrachten Sie eine analog zur Konvention der Vorlesung definierte Zweiparameterabbildung $\alpha(t,\nu) \equiv \alpha_\nu(t)$, für die gilt, dass $\alpha(t,0) = \gamma(t)$. Zeigen Sie, dass $F_\alpha(\nu) = F[\alpha_\nu]$ als

$$F_\alpha(\nu) = F[\gamma] + \delta_\alpha F + O(\nu^2) \tag{4}$$

geschrieben werden kann und bestimmen Sie $\delta_\alpha F$.

Now we have $F_\alpha(\nu)$, it a functional of a function $\alpha(\nu,t)$, where α is a function of ν and t. In this representation, the functional $F_\alpha(\nu)$ is also a function of ν which is a parameter that characterize a family of curves. For notation clarity, let's write it as $F[\alpha;\nu]$.

Within this family of curves, we are looking for a specific trajectory, characterized by ν_0, that extremalize the functional $F[\alpha;\nu]$. For this purpose, we begin the parameter ν which deviates slightly from ν_0,

$$F[\alpha; v] = \int_{t_1}^{t_2} dt f(\alpha(t,\nu))$$

then we can expand $f(\alpha(t,v))$ by a Taylor series originated from $v_0 = 0$,

$$f(\alpha(t,\nu)) = f(\alpha(t,\nu_0)) + \frac{d}{d\nu} f(\alpha(t,\nu))\Big|_{\nu=0}(\nu) + \mathcal{O}(\nu^2)$$

Then $F[\alpha; v]$ becomes,

$$\begin{aligned} F[\alpha; v] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(f(\alpha(t,\nu_0)) + \frac{d}{d\nu} f(\alpha(t,\nu))\Big|_{\nu=0} \nu + \mathcal{O}(\nu^2) \right) \\ &= F[\gamma] + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{d\nu} f(\alpha(t,\nu))\Big|_{\nu=0} \nu + \mathcal{O}(\nu^2) \end{aligned}$$

and therefore by comparison with equation (4), $\delta_\alpha F$,

$$\delta_\alpha F = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\nu} f(\alpha(t,\nu))\Big|_{\nu=0} \nu = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\alpha^i(t,\nu)}{d\nu} \frac{\partial}{\partial \alpha^i(t,\nu)} f(\alpha(t,\nu))\Big|_{\nu=0} \nu$$

Aus Ihrem Ergebnis sollte nun folgen, dass $\delta_\alpha F = 0$ gleichbedeutend ist mit der Aussage, dass γ einem Extremum von F innerhalb der Familie von Kurven $\alpha_\nu(t)$ entspricht. Wir wollen dieses Vorgehen nun so verallgemeinern, dass es ohne die Wahl einer expliziten Familie von Kurven $\alpha_\nu(t)$ angewendet werden kann.

(iii) Betrachten Sie nun eine beliebige Störung der Kurve γ, gegeben durch

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \delta\gamma(t), \tag{5}$$

wobei $\delta\gamma(t)$ eine beliebige, vektorwertige Funktion im euklidischen Vektorraum als Teil der Galilei-Raumzeit bezeichne. Verallgemeinern Sie nun Ihre Herangehensweise aus Teilaufgabe (ii), um zu zeigen, dass

$$F[\tilde{\gamma}] = F[\gamma] + \delta F + O(\delta q^2), \tag{6}$$

und bestimmen Sie δF.

Instead of using parameter ν to characterize the family of curves, here we vary directly the curve $\gamma(t)$ to extremalize the functional $F[\tilde{\gamma}]$.

Generalizing our method in exercise (ii), we expand the functional $F[\tilde{\gamma}]$ by a Taylor series around the curve $\gamma(t)$, which is the curve that extremalizes the functional.

Recall that, $\tilde{\gamma}(t)$ is a curve that is infinitesimally deviated from the the curve $\gamma(t)$ by $\delta\gamma(t)$,

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \delta\gamma(t)$$

Perturbation of the curve, $\delta\gamma(t)$, can be expressed equivalently as the fluctuation of the position, $\delta q(t)$, along the trajectory, $\tilde{q}_0(t)$, that extremalize the functional $F[\gamma]$,

$$\tilde{q}(t) = q_0(t) + \delta q(t)$$

since the functional $F[\gamma]$ is expressed in terms of $f(q(t))$, now we can expand $f(\tilde{q}(t))$ by a Taylor series around $q_0(t)$,

$$\begin{aligned} f(\tilde{q}(t)) &= f(q(t) + \delta q(t)) \\ &= f(q_0(t)) + \frac{\partial}{\partial q^i(t)} f(q(t))\Big|_{q(t)=q_0(t)} \delta q^i(t) + \mathcal{O}(\delta q(t)^2) \end{aligned}$$

Then, the functional $F[\tilde{\gamma}]$ is obtained by inserting our expansion into equation 3,

$$\begin{aligned} F[\tilde{\gamma}] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(f(q_0(t)) + \frac{\partial}{\partial q^i(t)} f(q(t))\Big|_{q(t)=q_0(t)} \delta q^i(t) + \mathcal{O}(\delta q(t)^2) \right) \\ &= F[\gamma] + \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{\partial}{\partial q^i(t)} f(q(t))\Big|_{q(t)=q_0(t)} \delta q^i(t) + \mathcal{O}(\delta q(t)^2) \end{aligned}$$

This we can compare with equation (6) to identify δF,

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{\partial}{\partial q^i(t)} f(q(t))\Big|_{q(t)=q_0(t)} \delta q^i(t)$$

(iv) Betrachten Sie nun ein Funktional der Form

$$G[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; g(q(t), \dot{q}(t)). \tag{7}$$

Bestimmen Sie δG als Funktion von $\delta\gamma$. Was muss gelten, damit eine Kurve γ dieses Funktional minimiert/maximiert?

Hinweis: Sie dürfen hier annehmen, dass $\alpha_\nu(t_{1/2})$ unabhängig vom exakten Wert von ν ist. Was bedeutet das für $\delta\gamma(t_{1/2})$?

With the same technique, but this time we need to consider perturbations with respect to two parameters,

$$q(t) = q_0(t) + \delta q(t), \qquad \dot{q}(t) = \dot{q}_0(t) + \delta\dot{q}(t)$$

the function $g(q(t), \dot{q}(t))$ can be expanded by a Talylor series origined from $q_0(t)$ and $\dot{q}_0(t)$ with perturbations $\delta q_0(t)$ and $\delta\dot{q}_0(t)$,

$$g(q(t), \dot{q}(t)) = g(q_0(t), \dot{q}_0(t)) + \frac{\partial}{\partial q^i(t)} g(q(t), \dot{q}(t))\Big|_{q_0, \dot{q}_0} \delta q^i(t) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i(t)} g(q(t), \dot{q}(t))\Big|_{q_0, \dot{q}_0} \delta\dot{q}^i(t) + ...$$

Subsitute into equation (7),

$$G[\gamma] = G[\gamma_0] + \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{\partial}{\partial q^i(t)} g(q(t), \dot{q}(t))\Big|_{q_0, \dot{q}_0} \delta q^i(t) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i(t)} g(q(t), \dot{q}(t))\Big|_{q_0, \dot{q}_0} \delta\dot{q}^i(t) + ...$$

Upon integration by part on the third term,

$$\begin{aligned} G[\gamma] = G[\gamma_0] &+ \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{\partial}{\partial q^i(t)} g(q(t), \dot{q}(t))\Big|_{q_0, \dot{q}_0} \delta q^i(t) \\ &- \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i(t)} g(q(t), \dot{q}(t))\Big|_{q_0, \dot{q}_0} \right] \delta q^i(t) + \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i(t)} g(q(t), \dot{q}(t))\Big|_{q_0, \dot{q}_0} \delta q^i(t) \right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} + ... \end{aligned}$$

For the last term of the above equation, the variation $\delta q(t)$ vanishes at fixed end point, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, therefore we get,

$$G[\gamma] = G[\gamma_0] + \delta G + \mathcal{O}\left((\delta q)^n (\delta\dot{q})^m\right)$$

for n and m are positive integers of $n+m \geq 2$. Then,

$$\delta G = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial}{\partial q^i(t)} g(q(t), \dot{q}(t)) \Big|_{q_0, \dot{q}_0} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i(t)} g(q(t), \dot{q}(t)) \Big|_{q_0, \dot{q}_0} \right] \right) \delta q^i(t)$$

This is δG expressed as a function of $\delta\gamma(t)$, as $\delta q(t)$ is its representation in coordinates. In order to extremalize the functional $G[\gamma(t), \gamma_0(t)]$, we require

$$\delta G = 0$$

If we assume the perturbation $\delta q(t) \neq 0$ and arbitrary, it implies that $g(q(t), \dot{q}(t))$ must satisfy the following relation at the extremum,

$$\frac{\partial}{\partial q^i(t)} g(q(t), \dot{q}(t)) \Big|_{q_0, \dot{q}_0} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i(t)} g(q(t), \dot{q}(t)) \Big|_{q_0, \dot{q}_0} \right] = 0$$

3 Fermats Prinzip und Brechungsgesetze

Wir betrachten im Folgenden ein System in der (x, y)–Ebene. Das Fermatsche Prinzip besagt, dass Licht aus allen möglichen Pfaden welche zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) verbinden immer denjenigen auswählt, welcher die Laufzeit minimiert. Es ergibt sich also

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \; . \tag{8}$$

Die Geschwindigkeit ist die Veränderung der Position mit der Zeit

$$v \equiv v(x, y) = \frac{ds}{dt} \; , \tag{9}$$

und hängt daher im Prinzip von den Koordinaten ab. Ein infinitesimales Längenelement lässt sich durch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{10}$$

schreiben. Daraus folgt

$$\tau = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v} \; , \tag{11}$$

wobei der Strich die Ableitung bezüglich x bezeichnet, i.e.

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} \; . \tag{12}$$

(i) Wir nehmen zunächst ein homogenes Medium an. Betrachten Sie einen Pfad y und eine Variation dieses Pfades $y \to y + \delta y$ und bestimmen Sie eine Gleichung für y' so, dass das obige Integral für τ extremalisiert wird. Charakterisieren sie den Pfad welchen das Licht nimmt. *Hinweis:* $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$.

Betrachten wir zunächst $y = y + \delta y$, dann können wir für das Laufzeitintegral schließen, dass

$$\begin{aligned}
\tau[y + \delta y] - \tau[y] = \delta\tau &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v} \sqrt{1 + (y' + \delta y')^2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v} \sqrt{1 + y'^2} \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v} \sqrt{1 + y'^2} \sqrt{1 + \frac{2\delta y' y'}{1 + y'^2} + \frac{\delta y'^2}{1 + \delta y'^2}} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v} \sqrt{1 + y'^2} \\
&\simeq \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v} \frac{y' \delta y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + \mathcal{O}(\delta y^2).
\end{aligned}$$

Durch partielle Integration, sowie der Vernachlässigung der Randterme, da $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$, finden wir schließlich

$$\delta\tau = -\frac{1}{v}\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\delta y.$$

Da wir am stationären Punkt interessiert sind, fordern wir $\delta\tau = 0$, also folgt

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const} = c.$$

Diese Gleichung lässt sich einfach lösen, und wir erhalten

$$y(x) = \alpha x + \beta,$$

was bedeutet, dass sich Lichtstrahlen in homogenen Medien stets auf geraden Linien ausbreiten.

(ii) Nun gehen wir davon aus, dass die Geschwindigkeit des Lichts von seiner Position abhängt, d.h. $v = v(x)$. Betrachten Sie wieder $y \to y + \delta y$ und bestimmen sie die Stationären Punkte von τ. Welcher Unterschied ergibt sich zu $v =$ konstant? *Hinweis:* Sie müssen die Differentialgleichung für y' dazu nicht lösen.

Unter Anwendung analoger Schritte wir in der ersten Teilaufgabe, finden wir

$$\frac{1}{v(x)}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}.$$

(iii) zeigen Sie das Snellsche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}\ , \tag{13}$$

Hinweis: Nutzen Sie das obige Resultat.

Unter Nutzer des Resultats der vorangegangenen Teilaufgabe und finden wir die Gleichung, für zwei verschiedene Medien,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v(x)}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_1 &= \frac{1}{v(x)}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_2 \\
\Rightarrow \frac{1}{v(x)}\frac{dy/dx}{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}\Bigg|_1 &= \frac{1}{v(x)}\frac{dy/dx}{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}\Bigg|_2 \\
\Rightarrow \frac{1}{v(x)}\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\bigg|_1 &= \frac{1}{v(x)}\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\bigg|_2 .
\end{aligned}$$

Dieses Resultat können wir nun geometrisch interpretieren als einen Sinusausdruck eines Winkels zum Lot, eines auf die Grenze eines Mediums einfallenden Lichtstrahles, sowie eines ausfallenden Lichtstrahles mit einem anderem Winkel. Somit gilt,

$$\sin\theta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} \equiv \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypothenuse}},$$

woraus folgt,

$$\frac{1}{v_1}\sin\theta_1 = \frac{1}{v_2}\sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

(iv) zeigen Sie das Snellsche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} , \tag{14}$$

Hinweis: Nutzen Sie das obige Resultat.

Unter Nutzer des Resultats der vorangegangenen Teilaufgabe und finden wir die Gleichung, für zwei verschiedene Medien,

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(x)} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_1 &= \frac{1}{v(x)} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_2 \\ \Rightarrow \frac{1}{v(x)} \frac{dy/dx}{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}\bigg|_1 &= \frac{1}{v(x)} \frac{dy/dx}{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}\bigg|_2 \\ \Rightarrow \frac{1}{v(x)} \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\bigg|_1 &= \frac{1}{v(x)} \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\bigg|_2 . \end{aligned}$$

Dieses Resultat können wir nun geometrisch interpretieren als einen Sinusausdruck eines Winkels zum Lot, eines auf die Grenze eines Mediums einfallenden Lichtstrahles, sowie eines ausfallenden Lichtstrahles mit einem anderem Winkel. Somit gilt,

$$\sin\theta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} \equiv \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse},$$

woraus folgt,

$$\frac{1}{v_1}\sin\theta_1 = \frac{1}{v_2}\sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

(v) Zeigen Sie für Reflektion gilt

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2 . \tag{15}$$

Hinweis: Nach der Reflektion befindet sich das Licht im selben Medium d.h. $v_1 = v_2$.

Unter Berücksichtigung des Resultats der vorangegangenen Aufgabe, sowie $v_1 = v_2$ gilt,

$$\frac{1}{v_1}\sin\theta_1 = \frac{1}{v_1}\sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_1 = \sin\theta_2.$$

4 Metrik und Geodäten auf der Kugel

Betrachten Sie die Metrik auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius r:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{16}$$

mit $\mu, \nu \in I(2)$.

(i) Bestimmen Sie die Metrikkomponenten $g_{\mu\nu}$ für $x^1 = \theta$ und $x^2 = \phi$.

For the most obvious, one can immediate read off the metric component,

$$g_{\theta\theta} = r^2, \qquad g_{\psi\psi} = r^2\sin^2\theta, \qquad g_{\theta\psi} = g_{\psi\theta} = 0$$

One can also do it form the beginning. We start with the line-element of Euclidean space with coordinate x^i for $i = 1, 2, 3$,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

Expressing this line element by the Euclidean metric,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

where $g_{ij} = 1$ for $i = j$ and $g_{ij} = 0$ for $i \neq j$.
Now, by a coordinate transformation, we can fine the metric of the 2-sphere $\tilde{g}_{\mu\nu}$ of radius r. This is simply a spherical surface embedded in a three dimensional Euclidean space. In spherical coordinate, which we denotes as x^μ and x^ν for $\mu, \nu = 1, 2$, the metric transformas as,

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^j}{\partial x^\nu} g_{ij} \tag{17}$$

From now on we need our results from exercise 3,

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\psi \\ r\sin\theta\sin\psi \\ r\cos\theta \end{bmatrix}$$

and

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial r} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\psi \\ r\cos\theta\sin\psi \\ -r\sin\theta \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \psi} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta\sin\psi \\ r\sin\theta\cos\psi \\ 0 \end{bmatrix},$$

as an example, for $\tilde{g}_{\theta\theta}$,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\theta\theta} &= \frac{\partial x^1}{\partial \theta}\frac{\partial x^1}{\partial \theta} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial \theta}\frac{\partial x^2}{\partial \theta} g_{22} + \frac{\partial x^3}{\partial \theta}\frac{\partial x^3}{\partial \theta} g_{33} \\ &= (r\cos\theta\cos\psi)^2 + (r\cos\theta\sin\psi)^2 + (-r\sin\theta)^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

Similarly, we can proof,

$$\tilde{g}_{\psi\psi} = r^2\sin^2\theta, \qquad \tilde{g}_{\psi\theta} = \tilde{g}_{\theta\psi} = 0$$

so that the line-element in spherical coordinate,

$$ds^2 = r^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2\big)$$

(ii) Benutzen Sie die Christoffel Symbole vom letzten Blatt um die Geodäte zwischen zwei Punkten auf dem Äquator zu bestimmen.

From exercise 3, the Christoffel symbol with only the component θ and ψ are,

$$\Gamma^\theta_{\psi\psi} = -\cos\theta(t)\sin\theta, \qquad \Gamma^\psi_{\psi\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

Also from exercise 3,

$$\ddot{\gamma} = \ddot{q}^a(t) + \Gamma^a_{bc}\,\dot{q}^b(t)\dot{q}^c(t)$$

For geodesic equation, where the acceleration along γ is zero, is defined by Concept 1.2.10 as,

$$\ddot{\gamma} = 0$$

Then, for $q^1(t) = \theta(t)$, the geodesic equation for $\theta(t)$ and $\psi(t)$ is,

$$\ddot{\theta}(t) = \cos\theta(t)\sin\theta(t)\,\dot{\psi}(t)\dot{\psi}(t), \qquad \ddot{\psi}(t) = -\frac{2\cos\theta(t)}{\sin\theta(t)}\,\dot{\theta}(t)\dot{\psi}(t)$$

One can take a further step to simplify the second equation by absorbing the time derivative,

$$\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta(t)\frac{d\psi(t)}{dt}\right) = 0$$

This tells us that, for all possible θ,

$$\sin^2\theta(t)\frac{d\psi(t)}{dt} = c$$

where c is a constant. When $\theta(t) = n\pi$ for n is an integer, $\sin^2\theta(t) = 0$, unless $\dot{\psi}(t) \to \infty$, which is unlikely to happen, otherwise we have $c = 0$. This means that,

$$\sin^2\theta\frac{d\psi(t)}{dt} = 0$$

This tells us that,

$$\dot{\psi}(t) = 0, \qquad \psi(t) = \psi_0$$

where ψ_0 is some constant, and therefore,

$$\ddot{\theta}(t) = \cos\theta(t)\sin\theta(t)\,\dot{\psi}(t)\dot{\psi}(t) = 0$$

so that,

$$\theta(t) = \theta_0 + v_\theta t$$

for some constant θ_0 and v_θ waiting to be determined by the physical system.
Another possibility is to take $\theta(t) = \theta_0$. In this case, we have,

$$\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta_0\,\frac{d\psi(t)}{dt}\right) = 0$$

This would therefore implies,

$$\frac{d^2}{dt^2}\psi(t) = 0$$

and therefore

$$\psi(t) = \psi_0 + v_\psi t$$

again, ψ_0 and v_ψ are constants waiting to be determined by the physical system. Meanwhile, θ_0 has to satisfy the following geodesic equation as well,

$$0 = \cos\theta_0\sin\theta_0\dot{\psi}(t)\dot{\psi}(t)$$

since $\dot{\psi}(t) \neq 0$, this is only possible when $\theta_0 = \pi/2$.

(iii) Berechnen Sie den Abstand der beiden Punkte als Funktion ihrer Koordinaten uns skizzieren Sie die Geodäte.

Straightforwardly, the arclength or the separation between two points,

$$ds = r\sqrt{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\psi)^2}$$

Therefore we have,

$$s_{\text{arc}} = r\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{1+\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

In order to sketch the geodesic, we consider both cases from what we have calculated in (ii).
For fixed θ,

$$\theta(t) = \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \psi(t) = \psi_0 + v_\psi t$$

On the other hand, for fixed ψ,

$$\psi(t) = \psi_0, \qquad \theta(t) = \theta_0 + v_\theta t$$

This is simply sketching all possible great circle on a 2-sphere.

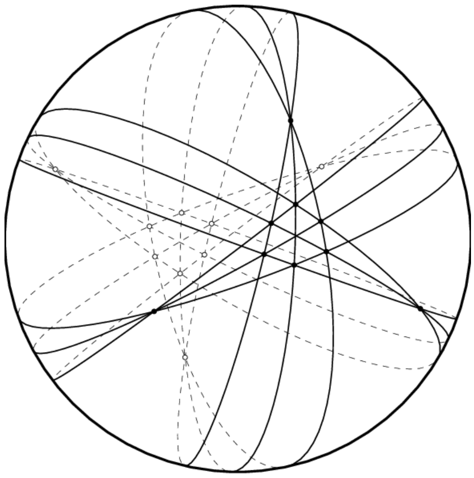

Abbildung 1: Geodesics on a 2-sphere (I do not own this picture, it is from: Jürgen, Richter-Gebert and Ziegler, Günter. (2004). 6 ORIENTED MATROIDS.